

Univerzitet u Kragujevcu
Prirodno-matematički fakultet

Marija Stanić

NESTANDARDNE
ORTOGONALNOSTI I
ODGOVARAJUĆE KVADRATURE
GAUSS-OVOG TIPa

Magistarska teza

Kragujevac
2003

Sadržaj

1	Uvod	3
1.1	Organizacija rada	3
1.2	Publikovani delovi rada	4
1.3	Zahvalnost	4
2	Polinomi ortogonalni na polukrugu	5
2.1	Egzistencija i reprezentacija polinoma ortogonalnih na polukrugu	6
2.2	Rekurentna relacija za polinome ortogonalne na polukrugu	10
2.3	Polinomi ortogonalni na polukrugu sa simetričnom težinskom funkcijom	12
2.4	Nule polinoma ortogonalnih na polukrugu	13
2.4.1	Izračunavanje nula	13
2.4.2	Simetrične težinske funkcije	14
2.5	Jacobi-eva težinska funkcija	19
2.6	Gauss–Gegenbauer-ove kvadrature na polukrugu	21
3	<i>S</i>-ortogonalnost i Gauss–Turán-ove kvadrature	23
3.1	<i>S</i> -ortogonalni polinomi sa datom težinskom funkcijom	25
3.2	Numerička konstrukcija <i>s</i> -ortogonalnih polinoma	28
3.3	Gauss–Turán-ove kvadraturene formule	31

4	Višestruko ortogonalni polinomi	36
4.1	Višestruko ortogonalni polinomi tipa II	37
4.2	Numerička konstrukcija višestruko ortogonalnih polinoma tipa II	39
4.3	Rekurentne relacije	42
4.4	Numerička konstrukcija višestruko ortogonalnih polinoma tipa II sa skoro dijagonalnim multi-indeksima	44
4.5	Odgovarajuće kvadrature formule Gauss-ovog tipa	49
4.6	Numerički primeri	53
4.6.1	Višestruko ortogonalni Jacobi-evi polinomi	53
4.6.2	Višestruko ortogonalni Laguerre-ovi polinomi	54
5	<i>S</i>-ortogonalni polinomi na polukrugu	60
6	Višestruko ortogonalni polinomi na polukrugu	66
6.1	Egzistencija i jedinstvenost	68
6.2	Rekurentne relacije i numerička konstrukcija višestruko ortogonalnih polinoma na polukrugu	69
6.3	Kvadrature formule Gauss-ovog tipa	71
6.4	Numerički primeri	73
	Literatura	74

1

Uvod

Oblast istraživanja u okviru ove magistarske teze je razmatranje nestandardnih tipova ortogonalnosti i njihova primena na konstrukciju kvadrature formula maksimalnog stepena tačnosti. Istraživanja u ovoj graničnoj oblasti između teorije aproksimacija i numeričke analize su veoma aktuelna. S jedne strane radi se o istraživanjima povezanim sa teorijom ortogonalnih sistema, u ovom slučaju sa više konceptata nestandardne ortogonalnosti, prvenstveno na polukrugu u kompleksnoj ravni, i konstrukciji kvadrature formula za numeričku integraciju funkcija, sa druge strane.

U ovoj tezi će biti objedinjena tri različita pravca istraživanja: ortogonalnost na polukrugu u kompleksnoj ravni u odnosu na nehermitski skalarni proizvod, koncept s -ortogonalnosti, kao i koncept višestruke ortogonalnosti.

1.1 Organizacija rada

U glavi 2 prikazan je koncept ortogonalnosti na polukrugu u kompleksnoj ravni u odnosu na nehermitski skalarni proizvod. Takva ortogonalnost obezbeđuje konstrukciju kvadrature formula maksimalnog stepena tačnosti za numeričku integraciju funkcija na polukrugu ili kružnom luku u kompleksnoj ravni, kao i konstrukciju formula za izračunavanje Cauchy-ove glavne vrednosti nesvojstvenih integrala na $[-1, 1]$. Polinome ortogonalne na polukrugu uveli su i izučavali Gautschi i Milovanović [13]. U ovoj glavi dat je pregled poznatih osobina polinoma ortogonalnih na polukrugu [13, 12, 21, 19], veza sa odgovarajućim običnim ortogonalnim polinomima (realnim) (poglavlje 2.1). Posebna pažnja posvećena je polinomima ortogonalnim na polukrugu u odnosu na simetrične težinske funkcije (specijalno za Gegenbauer-ove težinske funkcije) zbog interesantnih osobina nula takvih polinoma. Takođe, dat je osvrt i na Jacobi-ove težinske funkcije zbog povezivanja koncepta ortogonalnosti na polukrugu sa konceptom višestruke ortogonalnosti.

U glavi 3 prikazan je koncept s -ortogonalnosti i kvadrature formule maksimalnog stepena tačnosti sa višestrukim čvorovima. Dat je pregled poznatih osobina s -ortogonalnih polinoma, kao i numerički stabilnih algoritama za konstrukciju opštih kvadrature formula sa višestrukim čvorovima [14, 15, 20, 24, 27].

Nedavno je C.F. Borges [5] razmatrao sistem kvadrature formula na realnoj pravoj, u odnosu na više težinskih funkcija, ali sa jednim istim sistemom čvorova. Potreba za ovakvim sistemom kvadrature pojavila se u kompjuterskoj grafici. U izvesnom smislu to predstavlja generalizaciju Gauss-ove integracije. Pokazalo se da su ove kvadrature u uskoj vezi sa konceptom višestruke ortogonalnosti koji je razvijen proteklih godina. Međutim, Borges nije koristio višestruko ortogonalne polinome. U glavi 4 prikazan je koncept višestruke ortogonalnosti. Tu je dat i novi, efikasan, metod za numeričku konstrukciju višestruko ortogonalnih polinoma [29], kao i metod za konstrukciju kvadrature formula koje je Borges razmatrao.

U glavi 5 razmatrano je prenošenje koncepta s -ortogonalnosti uvedenog u glavi 3 na polukrug u kompleksnoj ravni uz uvođenje nehermitskog skalarnog proizvoda.

Najzad, u glavi 6 i koncept višestruke ortogonalnosti se prenosi takođe na polukrug u kompleksnoj ravni i na taj način se generališe koncept ortogonalnosti prikazan u glavi 2. Tu je dat algoritam za konstrukciju uvedenih višestruko ortogonalnih polinoma na polukrugu. Takođe, uvode se i odgovarajuće kvadrature formule maksimalnog stepena tačnosti, tj. kvadrature formule Gauss-ovog tipa.

1.2 Publikovani delovi rada

Neki delovi ovog rada su prihvaćeni za štampanje u Facta Univ. Ser. Math. Inform (videti [29]).

1.3 Zahvalnost

Veliki doprinos ovom radu, najpre kroz razgovore o aktuelnim istraživanjima u teoriji aproksimacija i teoriji ortogonalnosti, a zatim i kroz konkretne zadatke dao je profesor dr Gradimir V. Milovanović, mentor rada i inicijator ovog istraživanja. Značajan doprinos radu dao je i profesor dr Miodrag M. Spalević. Njihove sugestije prisutne su u mnogim delovima rada. Posebno bih izdvojila i njihovu pomoć oko nabavke neophodne literature.

Pored profesora Milovanovića i profesora Spalevića, zahvalnost dugujem i docentu dr Branislavu Z. Popoviću na uloženom trudu oko čitanja teksta i korisnim primedbama i sugestijama.

2

Polinomi ortogonalni na polukrugu

Neka je w težinska funkcija, koja je pozitivna i integrabilna na otvorenom intervalu $(-1, 1)$ sa eventualnim singularitetima u krajnjim tačkama, takva da se može analitički produžiti na gornji poludisk $D_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$. Neka je to analitičko produženje funkcija $w(z)$. Razmotrimo sledeća dva skalarna proizvoda:

$$(2.1) \quad [f, g] = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} w(x) dx,$$

i

$$(2.2) \quad (f, g) = \int_{\Gamma} f(z) g(z) w(z) (iz)^{-1} dz = \int_0^{\pi} f(e^{i\theta}) g(e^{i\theta}) w(e^{i\theta}) d\theta,$$

gde je Γ kružni deo od ∂D_+ .

Skalarni proizvod (2.1) je pozitivno definitan i stoga generiše jedinstveni skup realnih ortogonalnih polinoma (p_k) ,

$$(2.3) \quad [p_k, p_l] \begin{cases} = 0 & \text{za } k \neq l \\ > 0 & \text{za } k = l \end{cases} \quad (k, l = 0, 1, 2, \dots),$$

gde je po pretpostavci p_k moničan polinom stepena k . Međutim, skalarni proizvod (2.2) nije Hermitski (namerno drugi faktor g nije konjugovan i integracija se ne vrši sa merom $|w(e^{i\theta})| d\theta$). Stoga egzistenciju odgovarajućih ortogonalnih polinoma moramo posebno ispitati.

Za kompleksne polinome π_k (π_k – moničan polinom stepena k) koji ispunjavaju uslov

$$(2.4) \quad (\pi_k, \pi_l) \begin{cases} = 0 & \text{za } k \neq l \\ \neq 0 & \text{za } k = l \end{cases} \quad (k, l = 0, 1, 2, \dots)$$

kažemo da su ortogonalni na polukrugu. Gautschi, Landau i Milovanović [12] su dokazali egzistenciju ovih polinoma pretpostavljajući jedino da je

$$(2.5) \quad \operatorname{Re} (1, 1) = \operatorname{Re} \int_0^{\pi} w(e^{i\theta}) d\theta \neq 0.$$

2.1 Egzistencija i reprezentacija polinoma ortogonalnih na polukrugu

Pretpostavimo da je težinska funkcija w pozitivna na intervalu $(-1, 1)$ i analitička u $D_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, takva da svi integrali u (2.1) i (2.2) postoje za glatke funkcije f i g (moguće i kao nesvojstveni integrali). Pretpostavimo još i da je ispunjen uslov (2.5). Označimo sa C_ε , $\varepsilon > 0$, granicu od D_+ sa kružnim delovima poluprečnika ε sa centrima u -1 i 1 . Obeležimo sa $\mathcal{P}$ skup svih polinoma. Tada je, na osnovu Cauchy-eve teoreme, za bilo koji polinom g ispunjeno

$$(2.6) \quad \begin{aligned} 0 &= \int_{C_\varepsilon} g(z)w(z) dz \\ &= \left(\int_{\Gamma_\varepsilon} + \int_{c_{\varepsilon,-1}} + \int_{c_{\varepsilon,1}} \right) g(z)w(z) dz + \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} g(x)w(x) dx, \quad g \in \mathcal{P}, \end{aligned}$$

gde su Γ_ε i $c_{\varepsilon,\pm 1}$ kružni delovi od C_ε (sa poluprečnicima 1 i ε respektivno). Pretpostavimo još da je težinska funkcija w takva da važi

$$(2.7) \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{c_{\varepsilon,\pm 1}} g(z)w(z) dz = 0 \quad \text{za sve } g \in \mathcal{P}.$$

Ako sada pustimo da $\varepsilon \downarrow 0$ u (2.6) dobijamo

$$(2.8) \quad 0 = \int_C g(z)w(z) dz = \int_\Gamma g(z)w(z) dz + \int_{-1}^1 g(x)w(x) dx, \quad g \in \mathcal{P}.$$

Poznato je da niz moničnih realnih polinoma (p_k) , ortogonalnih u odnosu na skalarni proizvod (2.1), kao i niz pridruženih polinoma druge vrste

$$(2.9) \quad q_k(z) = \int_{-1}^1 \frac{p_k(z) - p_k(x)}{z - x} w(x) dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

zadovoljava tročlanu rekurentnu relaciju oblika

$$(2.10) \quad y_{k+1} = (z - a_k)y_k - b_k y_{k-1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

gde je

$$(2.11) \quad \begin{aligned} y_{-1} &= 0, & y_0 &= 1 & \text{za } (p_k), \\ y_{-1} &= -1, & y_0 &= 0 & \text{za } (q_k). \end{aligned}$$

Označimo sa m_k i μ_k momente koji odgovaraju skalarnim proizvodima (2.1) i (2.2) respektivno, tj.

$$(2.12) \quad m_k = [x^k, 1], \quad \mu_k = (z^k, 1) \quad (k \geq 0).$$

Pretpostavlja se u (2.10) da je

$$(2.13) \quad b_0 = m_0.$$

TEOREMA 2.1. [12] *Neka je w težinska funkcija, pozitivna na intervalu $(-1, 1)$, analitička u $D_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, takva da je zadovoljen uslov (2.7) i da integrali u (2.8) postoje (moguće i kao nesvojstveni). Pretpostavimo još i da je uslov (2.5) zadovoljen. Tada postoji jedinstveni niz moničnih kompleksnih polinoma (π_k) ortogonalnih u odnosu na skalarni proizvod (2.2). Označimo sa (p_k) monične realne polinome, ortogonalne u odnosu na skalarni proizvod (2.1). Tada je*

$$(2.14) \quad \pi_n(z) = p_n(z) - i\theta_{n-1}p_{n-1}(z) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

gde je

$$(2.15) \quad \theta_{n-1} = \frac{\mu_0 p_n(0) + iq_n(0)}{i\mu_0 p_{n-1}(0) - q_{n-1}(0)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

odnosno

$$(2.16) \quad \theta_n = ia_n + \frac{b_n}{\theta_{n-1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad \theta_{-1} = \mu_0,$$

gde su a_k i b_k koeficijenti u rekurentnoj relaciji (2.10) i $\mu_0 = (1, 1)$. Specijalno, ako je $a_n = 0$ za sve $n \geq 0$, tada su svi θ_n realni (pozitivni). Važi i

$$(2.17) \quad (\pi_n, \pi_n) = \theta_{n-1}[p_{n-1}, p_{n-1}] \neq 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (\pi_0, \pi_0) = \mu_0.$$

DOKAZ: Pretpostavimo prvo da ortogonalni polinomi (π_k) postoje. Stavljajući

$$g(z) = \frac{1}{i}\pi_n(z)z^{k-1} \quad (1 \leq k < n),$$

u (2.8), dobijamo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} \pi_n(z) z^k (iz)^{-1} w(z) dz - i \int_{-1}^1 \pi_n(x) x^{k-1} w(x) dx \\ &= (\pi_n, z^k) - i[\pi_n, x^{k-1}] = -i[\pi_n, x^{k-1}] \quad (1 \leq k < n), \end{aligned}$$

odakle je

$$(2.18) \quad \pi_n(z) = p_n(z) - i\theta_{n-1}p_{n-1}(z) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

za neke konstante θ_{n-1} . Da bi odredili te konstante stavimo

$$g(z) = [\pi_n(z) - \pi_n(0)](iz)^{-1} = \frac{1}{i} \left[\frac{p_n(z) - p_n(0)}{z} - i\theta_{n-1} \frac{p_{n-1}(z) - p_{n-1}(0)}{z} \right]$$

u (2.8) i iskoristimo prvi izraz za g da izračunamo prvi integral i drugi da izračunamo drugi integral u (2.8). Onda iz (2.8) dobijamo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} [\pi_n(z) - \pi_n(0)](iz)^{-1} w(z) dz \\ &+ \int_{-1}^1 \frac{1}{i} \left[\frac{p_n(x) - p_n(0)}{x} - i\theta_{n-1} \frac{p_{n-1}(x) - p_{n-1}(0)}{x} \right] w(x) dx \\ &= \int_{\Gamma} \pi_n(z)(iz)^{-1} w(z) dz - \pi_n(0) \int_{\Gamma} (iz)^{-1} w(z) dz \\ &+ \frac{1}{i} \left[\int_{-1}^1 \frac{p_n(x) - p_n(0)}{x} w(x) dx - i\theta_{n-1} \int_{-1}^1 \frac{p_{n-1}(x) - p_{n-1}(0)}{x} w(x) dx \right], \end{aligned}$$

odakle zbog (2.9) dobijamo

$$(2.19) \quad 0 = (\pi_n, 1) - \pi_n(0)(1, 1) + \frac{1}{i} [q_n(0) - i\theta_{n-1} q_{n-1}(0)] \quad (n \geq 1).$$

Kako je $(\pi_n, 1) = 0$ i $(1, 1) = \mu_0$ koristeći (2.18) sa $z = 0$, dobijamo

$$\mu_0(p_n(0) - i\theta_{n-1} p_{n-1}(0)) = \frac{1}{i} q_n(0) - \theta_{n-1} q_{n-1}(0)$$

odakle rešavanjem po θ_{n-1} dobijamo (2.15) za $n \geq 1$. Imenilac i brojilac razlomka u (2.15) su različiti od 0 jer je $\operatorname{Re} \mu_0 \neq 0$ po pretpostavci (uslov (2.5)) i $p_k(0)$ i $q_k(0)$ nisu istovremeno jednaki 0 jer su (p_k) i (q_k) linearno nezavisna rešenja rekurentne relacije (2.10). Za $n = 0$ (2.15) takođe važi jer je zbog (2.11) $\theta_{-1} = \mu_0$ što je definicija data u (2.16).

Da bi dokazali prvu relaciju u (2.16), zamenimo n sa $n+1$ u (2.15) i iskoristimo (2.10) za $z = 0$. Sada dobijamo

$$\begin{aligned} \theta_n &= \frac{\mu_0 p_{n+1}(0) + i q_{n+1}(0)}{i \mu_0 p_n(0) - q_n(0)} \\ &= \frac{\mu_0 [-a_n p_n(0) - b_n p_{n-1}(0)] + i [-a_n q_n(0) - b_n q_{n-1}(0)]}{i \mu_0 p_n(0) - q_n(0)} \\ &= \frac{i a_n [i \mu_0 p_n(0) - q_n(0)] - b_n [\mu_0 p_{n-1}(0) + i q_{n-1}(0)]}{i \mu_0 p_n(0) - q_n(0)} \\ &= i a_n + \frac{b_n}{\theta_{n-1}} \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

Koristeći (2.15) za $n = 1$, (2.10) za $k = 0$ i (2.11) dobijamo

$$\theta_0 = \frac{\mu_0(-a_0) + ib_0}{i\mu_0} = ia_0 + \frac{m_0}{\mu_0},$$

jer je $b_0 = m_0$ (pretpostavka (2.13)). Dakle, (2.16) važi i za $n = 0$.

Ako su svi $a_n = 0$ onda je težinska funkcija w simetrična i realnost konstanti θ_n sledi iz (2.16) i činjenice da je tada $\mu_0 = (1, 1) = \pi w(0)$ (videti teoremu 2.3.).

Definišimo sada π_n sa (2.14) i (2.15). Tada iz (2.8) za $n \geq 2$ dobijamo

$$(\pi_n, z^k) = \frac{1}{i} \int_{\Gamma} \pi_n(z) z^{k-1} w(z) dz = i \int_{-1}^1 \pi_n(x) x^{k-1} w(x) dx = 0 \quad (1 \leq k < n).$$

Treba još pokazati da je i $(\pi_n, 1) = 0$ ($n \geq 1$). Iz jednakosti (2.19) koristeći relacije (2.14) za $z = 0$ i (2.15) dobijamo

$$\begin{aligned} (\pi_n, 1) &= \mu_0 \pi_n(0) + i[q_n(0) - i\theta_{n-1}q_{n-1}(0)] \\ &= \mu_0[p_n(0) - i\theta_{n-1}p_{n-1}(0)] + i[q_n(0) - i\theta_{n-1}q_{n-1}(0)] \\ &= \mu_0 p_n(0) + iq_n(0) - \theta_{n-1}[i\mu_0 p_{n-1}(0) - q_{n-1}(0)] \\ &= \mu_0 p_n(0) + iq_n(0) - \frac{\mu_0 p_n(0) + iq_n(0)}{i\mu_0 p_{n-1}(0) - q_{n-1}(0)}[i\mu_0 p_{n-1}(0) - q_{n-1}(0)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da bi kompletno dokazali teoremu 2.1. preostaje da pokažemo da važi (2.17).

$$\begin{aligned} (\pi_n, \pi_n) &= \int_{\Gamma} \pi_n(z) z^n w(z) (iz)^{-1} dz = \frac{1}{i} \int_{\Gamma} \pi_n(z) z^{n-1} w(z) dz \\ &= i \int_{-1}^1 \pi_n(x) x^{n-1} w(x) dx = i \int_{-1}^1 [p_n(x) - i\theta_{n-1}p_{n-1}(x)] x^{n-1} w(x) dx \\ &= \theta_{n-1} \int_{-1}^1 p_{n-1}^2(x) w(x) dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

PRIMER: Za težinsku funkciju $w(z) = 1 + z$ je $\mu_0 = (1, 1) = \pi + 2i$, $\operatorname{Re} \mu_0 = \pi \neq 0$ pa niz ortogonalnih polinoma (π_k) postoji. Dalje je

$$b_0 = m_0 = 2, \quad a_n = (2n+1)^{-1}(2n+3)^{-1} \text{ za } n \geq 0, \quad b_n = n(n+1)(2n+1)^{-2} \text{ za } n \geq 1,$$

pa je prema formuli (2.16)

$$\theta_0 = \frac{\pi - 4i}{3(2 - i\pi)}, \quad \theta_1 = \frac{3\pi + 8i}{5(4 + i\pi)}, \dots,$$

prema (2.10) i (2.11)

$$p_0(z) = 1, \quad p_1(z) = z - \frac{1}{3}, \quad p_2(z) = z^2 - \frac{2}{5}z - \frac{1}{5}, \dots,$$

i prema (2.14)

$$\pi_0(z) = 1, \quad \pi_1(z) = z - \frac{2}{2 - i\pi}, \quad \pi_2(z) = z^2 - \frac{i\pi}{4 + i\pi}z - \frac{4}{3(4 + i\pi)}, \dots$$

2.2 Rekurentna relacija za polinome ortogonalne na polukrugu

Pretpostavimo da je zadovoljen uslov (2.5), tj. da postoji niz ortogonalnih polinoma (π_k) . Obzirom da je za skalarni proizvod (2.2) ispunjeno $(zf, g) = (f, zg)$, tada ortogonalni polinomi (π_k) moraju zadovoljavati tročlanu rekurentnu relaciju, koja se može napisati u obliku [13, 12]

$$(2.20) \quad \begin{aligned} \pi_{k+1}(z) &= (z - i\alpha_k)\pi_k(z) - \beta_k\pi_{k-1}(z) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \\ \pi_{-1}(z) &= 0, \quad \pi_0(z) = 1. \end{aligned}$$

Na osnovu (2.14) za $k \geq 1$ iz (2.20) dobija se

$$p_{k+1}(z) - i\theta_k p_k(z) = (z - i\alpha_k)[p_k(z) - i\theta_{k-1}p_{k-1}(z)] - \beta_k[p_{k-1}(z) - i\theta_{k-2}p_{k-2}(z)],$$

odakle se zamenom $zp_k(z)$ i $zp_{k-1}(z)$ izrazima dobijenim iz rekurentne relacije (2.10) dobija

$$\begin{aligned} p_{k+1}(z) - i\theta_k p_k(z) &= p_{k+1}(z) + a_k p_k(z) + b_k p_{k-1}(z) \\ &\quad - i\theta_{k-1}[p_k(z) + a_{k-1}p_{k-1}(z) + b_{k-1}p_{k-2}(z)] \\ &\quad - i\alpha_k[p_k(z) - i\theta_{k-1}p_{k-1}(z)] - \beta_k[p_{k-1}(z) - i\theta_{k-2}p_{k-2}(z)], \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} [a_k + i(\theta_k - \theta_{k-1} - \alpha_k)]p_k(z) + [b_k - \beta_k - \theta_{k-1}(\alpha_k + ia_{k-1})]p_{k-1}(z) \\ + i[\beta_k\theta_{k-2} - b_{k-1}\theta_{k-1}]p_{k-2}(z) \equiv 0 \quad (k \geq 1). \end{aligned}$$

Zbog linearne nezavisnosti polinoma (p_k) zaključujemo da mora biti

$$(2.21) \quad a_k + i(\theta_k - \theta_{k-1} - \alpha_k) = 0 \quad (k \geq 1),$$

$$(2.22) \quad b_k - \beta_k - \theta_{k-1}(\alpha_k + ia_{k-1}) = 0 \quad (k \geq 1),$$

$$(2.23) \quad \beta_k\theta_{k-2} - b_{k-1}\theta_{k-1} = 0 \quad (k \geq 2).$$

Iz relacija (2.23) i (2.16) se dobija

$$(2.24) \quad \beta_k = \frac{\theta_{k-1}}{\theta_{k-2}} b_{k-1} = \theta_{k-1}(\theta_{k-1} - ia_{k-1}) \quad (k \geq 2).$$

Iz relacije (2.21) dobija se

$$(2.25) \quad \alpha_k = \theta_k - \theta_{k-1} - ia_k \quad (k \geq 1).$$

Da bi pokazali da relacija (2.24) važi i za $k = 1$ polazi se od relacije (2.22) za $k = 1$

$$b_1 - \beta_1 - \theta_0(\alpha_1 + ia_0) = 0,$$

odakle se zbog (2.25) za $k = 1$ dobija

$$\begin{aligned} \beta_1 &= b_1 - \theta_0(\theta_1 - \theta_0 - ia_1 + ia_0) \\ &= b_1 - \theta_0 \left(\frac{b_1}{\theta_0} - \theta_0 + ia_0 \right) \quad (\text{iz (2.16) za } n = 1) \\ &= \theta_0(\theta_0 - ia_0). \end{aligned}$$

Pokazaćemo sada da prethodno određeni koeficijenti α_k i β_k zadovoljavaju relaciju (2.22) koristeći pritom (2.16).

$$\begin{aligned} b_k - \beta_k - \theta_{k-1}(\alpha_k + ia_{k-1}) &= b_k - \beta_k - \theta_{k-1}(\theta_k - \theta_{k-1} - ia_k + ia_{k-1}) \\ &= b_k - \beta_k - \theta_{k-1}(\theta_k - ia_k) + \theta_{k-1}(\theta_{k-1} - ia_{k-1}) \\ &= b_k - \beta_k - \theta_{k-1} \cdot \frac{b_k}{\theta_{k-1}} + \beta_k = 0. \end{aligned}$$

Konačno iz $\pi_1(z) = z - i\alpha_0 = p_1(z) - i\theta_0 = z - a_0 - i\theta_0$ dobijamo

$$(2.26) \quad \alpha_0 = \theta_0 - ia_0.$$

Prema (2.16) možemo pisati (2.25) i (2.26) alternativno kao

$$(2.27) \quad \begin{aligned} \alpha_k &= -\theta_{k-1} + \frac{b_k}{\theta_{k-1}} \quad (k \geq 1), \\ \alpha_0 &= \frac{b_0}{\theta_{-1}} = \frac{m_0}{\mu_0}. \end{aligned}$$

Dakle, dokazano je da važi:

TEOREMA 2.2. *Pod pretpostavkom (2.5) monični kompleksni polinomi (π_k) ortogonalni u odnosu na skalarni proizvod (2.2) zadovoljavaju rekurentnu relaciju*

$$(2.28) \quad \begin{aligned} \pi_{k+1}(z) &= (z - i\alpha_k)\pi_k(z) - \beta_k\pi_{k-1}(z) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \\ \pi_{-1}(z) &= 0, \quad \pi_0(z) = 1, \end{aligned}$$

gde su koeficijenti α_k i β_k dati sa (2.25), (2.26) (ili sa (2.27)) i (2.24) respektivno, sa θ_n definisanim relacijom (2.15) (ili (2.16)). (Koeficijent β_0 u (2.28) je proizvoljan, međutim, najčešće se uzima da je $\beta_0 = \mu_0$.)

Izjednačavanjem koeficijenata uz z^k sa leve i desne strane rekurentne relacije (2.28) iz (2.26) i (2.25) dobija se

$$(2.29) \quad \pi_n(z) = z^n - \left(i\theta_{n-1} + \sum_{m=0}^{n-1} a_m \right) z^{n-1} + \dots \quad (n \geq 1).$$

2.3 Polinomi ortogonalni na polukrugu sa simetričnom težinskom funkcijom

TEOREMA 2.3. Neka težinska funkcija w zadovoljava sve uslove kao na početku poglavlja 2.1 i uslov

$$(2.30) \quad w(-z) = w(z) \quad i \quad w(0) > 0.$$

Tada je

$$(2.31) \quad \mu_0 = (1, 1) = \pi w(0)$$

i postoji jedinstveni niz ortogonalnih polinoma (π_k) .

DOKAZ: Neka je C_ε , $\varepsilon > 0$ granica oblasti D_+ sa malim polukrugom poluprečnika ε oko koordinatnog početka. Tada je po Cauchy-ovoj teoremi

$$(2.32) \quad 0 = \int_{\Gamma} \frac{w(z)}{iz} dz + \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^1 \right) \frac{w(x)}{ix} dx + \int_{c_\varepsilon} \frac{w(z)}{iz} dz,$$

gde su Γ i c_ε kružni delovi od C_ε (sa poluprečnicima 1 i ε respektivno). Ako sada pustimo da $\varepsilon \downarrow 0$ u (2.32) dobijamo

$$(2.33) \quad 0 = \mu_0 - i \oint_{-1}^1 \frac{w(x)}{x} dx - \pi w(0),$$

gde je integral na desnoj strani glavna vrednost Cauchy-evog integrala, koja je zbog simetrije težinske funkcije w jednaka 0. Dakle, važi (2.31). ■

Iz uslova (2.30) sledi da je u (2.10) $a_k = 0$ za sve $k \geq 0$, pa iz (2.26), (2.25) i (2.24) dobijamo

$$(2.34) \quad \alpha_0 = \theta_0, \quad \alpha_k = \theta_k - \theta_{k-1}, \quad \beta_k = \theta_{k-1}^2 \quad (k \geq 1),$$

i prema (2.16)

$$(2.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_0 = \frac{m_0}{\mu_0}, \quad \theta_1 = \frac{b_1}{\theta_0}, \\ \theta_{2m} = \theta_0 \frac{b_2 b_4 \cdots b_{2m}}{b_1 b_3 \cdots b_{2m-1}} \\ \theta_{2m+1} = \frac{1}{\theta_0} \frac{b_1 b_3 \cdots b_{2m+1}}{b_2 b_4 \cdots b_{2m}} \end{array} \right. \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Razmotrimo specijalno Gegenbauer-ove težinske funkcije

$$(2.36) \quad w(z) = (1 - z^2)^{\lambda-1/2}, \quad \lambda > -\frac{1}{2}.$$

Tada je $p_k(z) = \widehat{C}_k^\lambda(z)$, gde su $\widehat{C}_k^\lambda(z)$ monični Gegenbauer-ovi polinomi, za koje je

$$(2.37) \quad b_0 = m_0 = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda + 1)},$$

$$b_k = \frac{k(k + 2\lambda - 1)}{4(k + \lambda)(k + \lambda - 1)} \quad (k \geq 1).$$

Sada je na osnovu relacije (2.16)

$$\theta_n = \frac{n(n + 2\lambda - 1)}{4(n + \lambda)(n + \lambda - 1)} \frac{1}{\theta_{n-1}} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \theta_0 = \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda + 1)},$$

odnosno

$$(2.38) \quad \theta_0 = \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda + 1)},$$

$$\theta_k = \frac{1}{\lambda + k} \frac{\Gamma((k + 2)/2)\Gamma(\lambda + (k + 1)/2)}{\Gamma((k + 1)/2)\Gamma(\lambda + (k/2))} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

2.4 Nule polinoma ortogonalnih na polukrugu

2.4.1 Izračunavanje nula

Iz rekurentne relacije (2.20) sledi da su nule polinoma $\pi_n(z)$ sopstvene vrednosti kompleksne trodijagonalne matrice

$$(2.39) \quad J_n = \begin{bmatrix} i\alpha_0 & 1 & & & 0 \\ \beta_1 & i\alpha_1 & 1 & & \\ & \beta_2 & i\alpha_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & \beta_{n-1} & i\alpha_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Elementi matrice J_n se računaju iz (2.26), (2.25), (2.24) i (2.16). Vrednost μ_0 koja je potrebna za prethodna izračunavanja može se dobiti iz (2.12) numeričkom integracijom. Sopstene vrednosti se mogu računati QR algoritmom [17, 34].

Ako je težinska funkcija simetrična onda je $\beta_k = \theta_{k-1}^2 > 0$ i matrica (2.39) se može transformisati u realnu matricu. Naime, ako je

$$D_n = \text{diag}(1, i\theta_0, i^2\theta_0\theta_1, i^3\theta_0\theta_1\theta_2, \dots, i^{n-1}\theta_0\theta_1\dots\theta_{n-2}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

tada su sopstvene vrednosti ζ_ν matrice (2.39) jednake $i\eta_\nu$ gde su η_ν sopstvene vrednosti realne nesimetrične trodijagonalne matrice

$$(2.40) \quad -iD_n^{-1}J_nD_n = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \theta_0 & & & 0 \\ -\theta_0 & \alpha_1 & \theta_1 & & \\ & -\theta_1 & \alpha_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \theta_{n-2} \\ 0 & & & -\theta_{n-2} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}.$$

2.4.2 Simetrične težinske funkcije

Neka težinska funkcija w zadovoljava sve uslove kao na početku poglavlja 2.1 i uslov

$$(2.41) \quad w(-z) = w(z) \quad \text{i} \quad w(0) > 0.$$

Tada su prema (2.35) svi koeficijenti $\theta_{n-1} > 0$.

Za ispitivanje nula polinoma π_n koristićemo sledeću teoremu Giroux-a [26, Teorema 3.2.7.]:

TEOREMA 2.4. *Neka je*

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

$$g(x) = (x - y_1)(x - y_2) \dots (x - y_n)$$

sa $x_1 < y_1 < x_2 < \dots < y_{n-1} < x_n$. Tada, za bilo koji realan broj c , nule polinoma $x \mapsto h(x) = f(x) + icg(x)$ leže sve u polupojasu $\text{Im } z \geq 0$, $x_1 \leq \text{Re } z \leq x_n$ ili leže sve u konjugovanom polupojasu.

TEOREMA 2.5. *Ako je $\zeta \in \mathbb{C}$ nula polinoma π_n tada je $i - \bar{\zeta}$ takođe nula polinoma π_n , tj. nule polinoma π_n su locirane simetrično u odnosu na imaginarnu osu. Sve nule imaju pozitivan imaginarni deo i nalaze se u polupojasu*

$$S_+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0, -\zeta_n \leq \text{Re } z \leq \zeta_n\},$$

gde je ζ_n najveća nula polinoma p_n .

DOKAZ: Neka je $\bar{\pi}_n$ polinom koji se dobija iz polinoma π_n tako što se konjuguju svi koeficijenti, tj.

$$\bar{\pi}_n(z) = \overline{\pi_n(\bar{z})}.$$

Tada je na osnovu relacije (2.14)

$$(2.42) \quad \pi_n(-z) = (-1)^n \bar{\pi}_n(z).$$

Ako je ζ nula polinoma π_n , tada je prema (2.42)

$$0 = \pi_n(\zeta) = (-1)^n \bar{\pi}_n(-\zeta) = (-1)^n \overline{\pi_n(-\bar{\zeta})},$$

pa je $\pi_n(-\bar{\zeta}) = 0$.

Na osnovu rezultata Giroux-a sve nule polinoma π_n se nalaze ili u polupojasu $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \geq 0, -\zeta_n \leq \text{Re } z \leq \zeta_n\}$ ili u konjugovanom polupojasu. Na osnovu (2.29) zbir svih nula ima pozitivan imaginarni deo pa su sve nule u polupojasu $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \geq 0, -\zeta_n \leq \text{Re } z \leq \zeta_n\}$. Ostaje još da pokažemo da polinomi π_n nemaju realne nule. Ako bi $\zeta \in \mathbb{R}$ bila nula polinoma π_n tada bi moralo biti $p_{n-1}(\zeta) \neq 0$, jer bi u suprotnom zbog (2.14) dobili $p_n(\zeta) = p_{n-1}(\zeta) = 0$, što je nemoguće. Onda iz (2.14) sledi $i\theta_{n-1} = \frac{p_n(\zeta)}{p_{n-1}(\zeta)}$, što je opet nemoguće. Dakle, sve nule polinoma π_n leže u S_+ . ■

TEOREMA 2.6. *Sve nule polinoma π_n nalaze se u poludisku $D_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \text{Im } z > 0\}$, tačnije u $D_+ \cap S_+$, sa eventualnim izuzetkom jedne proste nule koja je na pozitivnom delu imaginarne ose.*

DOKAZ: Pretpostavimo prvo da je ζ nula polinoma π_n koja nije na imaginarnoj osi (tada je prema teoremi 2.5. $n \geq 2$). Prema teoremi 2.5. dovoljno je pokazati da je $|\zeta| < 1$. Polinom π_n tada na osnovu teoreme 2.5. ima i nulu $-\bar{\zeta}$, pa je

$$(2.43) \quad \pi_n(x) = p_n(x) - i\theta_{n-1}p_{n-1}(x) = (x - \zeta)(x + \bar{\zeta})r_{n-2}(x),$$

gde je $r_{n-2} \not\equiv 0$ polinom stepena $n - 2$. Zbog ortogonalnosti p_k i relacije (2.43) dobijamo

$$(2.44) \quad 0 = \int_{-1}^1 \pi_n(x) \overline{r_{n-2}(x)} w(x) dx = \int_{-1}^1 (x - \zeta)(x + \bar{\zeta}) |r_{n-2}(x)|^2 w(x) dx,$$

Obzirom da je

$$(x - \zeta)(x + \bar{\zeta}) = x^2 - 2ix \text{Im } \zeta - |\zeta|^2,$$

uzimajući realan deo iz (2.44) dobijamo

$$\int_{-1}^1 (x^2 - |\zeta|^2) |r_{n-2}(x)|^2 w(x) dx = 0,$$

što implicira $|\zeta| < 1$.

Iz istog razloga π_n ne može imati dve različite nule ili jednu dvostruku nulu na imaginarnoj osi sa imaginarnim delom ne manjim od 1. ■

Razmotrimo sada specijalno Gegenbauer-ove težinske funkcije

$$(2.45) \quad w(z) = (1 - z^2)^{\lambda-1/2}, \quad \lambda > -\frac{1}{2},$$

i označimo odgovarajuće polinome π_n sa

$$(2.46) \quad \pi_n^\lambda(z) = \widehat{C}_n^\lambda(z) - i\theta_{n-1}^\lambda \widehat{C}_{n-1}^\lambda(z) \quad (\theta_{n-1}^\lambda \text{ dato sa (2.38)}).$$

Sa $\widehat{C}_k^\lambda$ su označeni monični Gegenbauer-ovi polinomi.

LEMA 2.1 *Za Gegenbauer-ove težinske funkcije (2.45) konstante θ_{n-1}^λ zadovoljavaju sledeće relacije:*

$$(2.47) \quad \begin{array}{ll} \theta_{n-1}^\lambda < \frac{1}{2} & \text{za } -\frac{1}{2} < \lambda < 0 \text{ ili } \lambda > 1 \\ \frac{1}{2} < \theta_{n-1}^\lambda \leq \max(\theta_1^\lambda, \theta_2^\lambda) & \text{za } 0 < \lambda < 1 \quad (n = 2, 3, \dots). \\ \theta_{n-1}^\lambda = \frac{1}{2} & \text{za } \lambda = 0 \text{ ili } \lambda = 1 \end{array}$$

DOKAZ: Iz (2.38) sledi da je

$$(2.48) \quad \theta_{k+2}^\lambda \geq \theta_k^\lambda \quad \text{ako i samo ako je} \quad \lambda(\lambda - 1) \geq 0.$$

Takođe iz (2.38) primenom Stirling-ove formule dobijamo

$$(2.49) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \theta_k^\lambda = \frac{1}{2}.$$

Za $-\frac{1}{2} < \lambda < 0$ ili $\lambda > 1$ je prema (2.48) $\theta_{k+2}^\lambda > \theta_k^\lambda$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), pa je prema (2.49) $\theta_{n-1}^\lambda < \frac{1}{2}$ za sve $n \geq 2$.

Za $0 < \lambda < 1$ je prema (2.48) $\theta_{k+2}^\lambda < \theta_k^\lambda$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) i prema (2.49) $\frac{1}{2} < \theta_{n-1}^\lambda \leq \max(\theta_1^\lambda, \theta_2^\lambda)$ za sve $n \geq 4$ (i trivijalno za $n = 2$ i $n = 3$).

Konačno, za $\lambda = 0$ ili $\lambda = 1$ je $\theta_{n-1}^\lambda = \frac{1}{2}$ za sve $n \geq 2$. ■

TEOREMA 2.7. *Za $\lambda > -\frac{1}{2}$ sve nule polinoma $\pi_n^\lambda(z)$ ($n \geq 2$) nalaze se u poludisku $D_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.*

DOKAZ: Prema teoremi 2.6. dovoljno je pokazati da π_n^λ ($n \geq 2$) nema čisto imaginarne nule sa imaginarnim delom ne manjim od 1.

Neka je $\zeta = iy$ nula polinoma π_n^λ . Prema (2.14) (ili (2.46)) je

$$p_n(iy) - i\theta_{n-1}p_{n-1}(iy) = 0,$$

gde je $p_n = \hat{C}_n^\lambda$ i $\theta_{n-1} = \theta_{n-1}^\lambda$. Sada je

$$(2.50) \quad \frac{p_n(iy)}{ip_{n-1}(iy)} = \theta_{n-1}.$$

Obeležimo

$$(2.51) \quad \omega_k(y) = \frac{p_k(iy)}{ip_{k-1}(iy)} \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Tada se iz rekurentne relacije za p_k (relacije (2.10) i (2.11)) dobija

$$\omega_1(y) = y, \quad \omega_k(y) = y + \frac{b_{k-1}}{\omega_{k-1}(y)} \quad (k = 2, 3, \dots),$$

odakle je zbog $b_{k-1} > 0$,

$$\omega_k(y) \geq 1 \quad \text{za} \quad y \geq 1.$$

Prema tome leva strana u jednakosti (2.50) je ≥ 1 za $y \geq 1$ i $n \geq 1$. Treba još pokazati da je

$$(2.52) \quad \theta_{n-1} < 1 \quad \text{za} \quad n \geq 2,$$

tako da (2.50) ne može važiti za $y \geq 1$ kada je $n \geq 2$, pa prema tome i polinom π_n^λ ($n \geq 2$) ne može imati nulu iy takvu da je $y \geq 1$.

Prema lemi 2.1 nejednakost (2.52) je tačna ako je $-\frac{1}{2} < \lambda \leq 0$ ili $\lambda \geq 1$, a za $0 < \lambda < 1$ će slediti iz $\theta_1 < 1$, $\theta_2 < 1$. To se može pokazati korišćenjem Gautschi-eve nejednakosti za Γ funkciju:

Za $x > 0$, $0 < s < 1$ važi

$$(2.53) \quad x^{1-s} < \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+s)} < (x+1)^{1-s}.$$

Na osnovu (2.38) i gornje granice u (2.53) sledi da je za $\lambda > 0$

$$\theta_1 = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+1)}{2(\lambda+1)\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})} < \frac{\sqrt{\pi}}{2(\lambda+1)}(\lambda+1)^{1/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2(\lambda+1)^{1/2}} < \frac{\sqrt{\pi}}{2} < 1$$

i da je za $0 < \lambda < 1$

$$\theta_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}(\lambda+2)} \frac{\Gamma(\lambda+\frac{3}{2})}{\Gamma(\lambda+1)} < \frac{2}{\sqrt{\pi}(\lambda+2)} \left(\lambda+\frac{3}{2}\right)^{1/2} < \sqrt{\frac{5}{2\pi}} < 1. \quad \blacksquare$$

Teorema 2.7. ne važi za $n = 1$ i $-\frac{1}{2} < \lambda \leq 0$, jer nula $i\alpha_0 = i\theta_0$ ima modul koji raste od 1 do ∞ kada λ opada od 0 do $-\frac{1}{2}$. Međutim, za $\lambda > 0$ teorema važi i za $n = 1$.

LEMA 2.2 $\theta_{n-1} = \theta_{n-1}^\lambda$ zadovoljava sledeću nejednakost

$$(2.54) \quad 4(n + \lambda - 1)^2 \theta_{n-1}^2 < n(n + 2\lambda - 1), \quad n \geq 2, \quad \lambda > -\frac{1}{2}.$$

DOKAZ: Desna strana nejednakosti (2.54) je pozitivna jer je $n + 2\lambda - 1 > n - 2 \geq 0$. Prema (2.38) je

$$\begin{aligned} 4(n + \lambda - 1)^2 \theta_{n-1}^2 &= \left(2 \frac{\Gamma((n+1)/2) \Gamma(\lambda + (n/2))}{\Gamma(n/2) \Gamma(\lambda + (n-1)/2)} \right)^2 \\ &= \left[2 \cdot \frac{n}{2} \cdot \left(\lambda + \frac{n-1}{2} \right) \right]^2 \left(\frac{\Gamma((n+1)/2) \Gamma(\lambda + (n/2))}{\Gamma((n/2) + 1) \Gamma(\lambda + (n+1)/2)} \right)^2, \end{aligned}$$

tako da nejednakost (2.54) postaje

$$(2.55) \quad \left(\frac{\Gamma((n/2) + 1) \Gamma(\lambda + (n+1)/2)}{\Gamma((n+1)/2) \Gamma(\lambda + (n/2))} \right)^2 > \frac{1}{4} n(n + 2\lambda - 1),$$

koja sledi iz donje granice u (2.53) primenjene prvo za $x = \frac{1}{2}n$, $s = \frac{1}{2}$, a zatim za $x = \lambda + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$ i $s = \frac{1}{2}$. ■

TEOREMA 2.8. Za $\lambda > -\frac{1}{2}$ sve nule polinoma $\pi_n^\lambda(z)$ su proste.

DOKAZ: Dovoljno je, naravno, pokazati da teorema važi za $n \geq 2$. Obeležimo $p_n = \widehat{C}_n^\lambda$ i $\theta_{n-1} = \theta_{n-1}^\lambda$.

Neka je ζ nula polinoma $\pi_n = \pi_n^\lambda$. Prema relaciji (2.14) je tada

$$p_n(\zeta) = i\theta_{n-1} p_{n-1}(\zeta).$$

Na osnovu iste relacije (2.14) je

$$\begin{aligned} \pi_n'(\zeta) &= p_n'(\zeta) - i\theta_{n-1} p_{n-1}'(\zeta) \\ (2.56) \quad &= \frac{1}{p_{n-1}(\zeta)} [p_n'(\zeta) p_{n-1}(\zeta) - p_n(\zeta) p_{n-1}'(\zeta)]. \end{aligned}$$

Iz

$$(1 - \zeta^2) p_k'(\zeta) = (k + 2\lambda) \zeta p_k(\zeta) - 2(k + \lambda) p_{k+1}(\zeta)$$

i rekurentne relacije

$$p_{k+1}(\zeta) = \zeta p_k(\zeta) - \frac{k(k+2\lambda-1)}{4(k+\lambda-1)(k+\lambda)} p_{k-1}(\zeta),$$

iz (2.56) dobijamo

$$\begin{aligned} \pi'_n(\zeta) &= \frac{p_{n-1}(\zeta)}{2(1-\zeta^2)(n+\lambda-1)} [n(n+2\lambda-1) - 4(n+\lambda-1)^2 \theta_{n-1}^2 \\ &\quad - 2(2n+2\lambda-1)(n+\lambda-1)\zeta i \theta_{n-1}]. \end{aligned}$$

Ako je $\zeta = \alpha + i\beta$ tada je

$$\begin{aligned} \pi'_n(\zeta) &= \frac{p_{n-1}(\zeta)}{2(1-\zeta^2)(n+\lambda-1)} [n(n+2\lambda-1) - 4(n+\lambda-1)^2 \theta_{n-1}^2 \\ &\quad + 2(2n+2\lambda-1)(n+\lambda-1)\beta \theta_{n-1} - 2(2n+2\lambda-1)(n+\lambda-1)\alpha i \theta_{n-1}], \end{aligned}$$

pa je zbog leme 2.2 i činjenice da je $\beta > 0$ $\pi'_n(\zeta) \neq 0$, odnosno ζ je prosta nula polinoma π_n . ■

2.5 Jacobi-eva težinska funkcija

Razmotrimo sada slučaj Jacobi-evih težinskih funkcija

$$(2.57) \quad w(z) = w^{(\alpha, \beta)}(z) = (1-z)^\alpha (1+z)^\beta, \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1.$$

Egzistencija odgovarajućeg niza ortogonalnih polinoma (π_k) sledi na osnovu sledeće teoreme.

TEOREMA 2.9. *Za Jacobi-eve težinske funkcije (2.57) važi*

$$(2.58) \quad \mu_0 = \mu_0^{(\alpha, \beta)} = \int_0^\pi w^{(\alpha, \beta)}(e^{i\theta}) d\theta = \pi + i \int_{-1}^1 \frac{w^{(\alpha, \beta)}(x)}{x} dx,$$

gde je integral na desnoj strani Cauchy-eva glavna vrednost integrala. Prema tome $\operatorname{Re} \mu_0 \neq 0$.

DOKAZ: Postupajući analogno dokazu teoreme 2.3., iz jednakosti (2.33) i činjenice da je $w^{(\alpha, \beta)}(0) = 1$ sledi tražena jednakost (2.58). ■

Na osnovu teoreme 2.1. sada imamo

$$(2.59) \quad \pi_n(z) = \pi_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(z) - i\theta_{n-1}^{(\alpha, \beta)} \widehat{P}_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(z),$$

gde su $\widehat{P}_k^{(\alpha, \beta)}$ monični Jacobi-evi polinomi i $\theta_{n-1}^{(\alpha, \beta)}$ koeficijenti određeni relacijom (2.15) za $p_k(z) = \widehat{P}_k^{(\alpha, \beta)}(z)$ i $q_k(z)$ određeno relacijom (2.9).

TEOREMA 2.10. *Važi sledeća jednakost*

$$(2.60) \quad \pi^{(\beta, \alpha)}(z) = (-1)^n \overline{\pi_n^{(\alpha, \beta)}}(-z),$$

gde $\overline{\pi_n}$ označava polinom koji se dobija iz polinoma π_n konjugovanjem svih koeficijenata, tj.

$$\overline{\pi_n}(z) = \overline{\pi_n(\overline{z})}.$$

DOKAZ: Poznato je da za monične Jacobi-eve polinome važi

$$\widehat{P}_k^{(\beta, \alpha)} = (-1)^k \widehat{P}_k^{(\alpha, \beta)}(-z).$$

Kako je

$$w^{(\beta, \alpha)}(z) = w^{(\alpha, \beta)}(-z),$$

to iz (2.58) sledi da je

$$\mu_0^{(\beta, \alpha)} = \overline{\mu_0^{(\alpha, \beta)}}.$$

Iz (2.9) sledi

$$q_k^{(\beta, \alpha)}(z) = (-1)^{k+1} q_k^{(\alpha, \beta)}(-z),$$

što zajedno sa (2.15) daje

$$\theta_{n-1}^{(\beta, \alpha)} = \overline{\theta_{n-1}^{(\alpha, \beta)}},$$

pa je

$$\pi_n^{(\beta, \alpha)}(z) = (-1)^n \left[\widehat{P}_n^{(\alpha, \beta)}(-z) + i \overline{\theta_{n-1}^{(\alpha, \beta)}} \widehat{P}_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(-z) \right],$$

odakle, prema (2.59), sledi (2.60). ■

Veličina $\mu_0^{(\alpha, \beta)}$ potrebna je za generisanje koeficijenata $\theta_{n-1}^{(\alpha, \beta)}$ prema (2.16) i koeficijenata rekurentne relacije α_k, β_k prema (2.27) i (2.24). Za numeričko računanje veličine $\mu_0^{(\alpha, \beta)}$ bolje je koristiti prvi izraz u (2.58), koji se zbog

$$\begin{aligned} (1 - e^{i\theta})^\alpha (1 + e^{i\theta})^\beta &= \left(2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - i 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right)^\alpha \left(2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - i 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right)^\beta \\ &= 2^{\alpha+\beta} \sin^\alpha \frac{\theta}{2} \cos^\beta \frac{\theta}{2} \left(\sin \frac{\theta}{2} - i \cos \frac{\theta}{2} \right)^\alpha \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)^\beta \\ &= 2^{\alpha+\beta} \sin^\alpha \frac{\theta}{2} \cos^\beta \frac{\theta}{2} e^{-i\alpha(\pi-\theta)/2} e^{i\beta\theta/2} \\ &= 2^{\alpha+\beta} \sin^\alpha \frac{\theta}{2} \cos^\beta \frac{\theta}{2} e^{-i\alpha\pi/2} e^{i(\alpha+\beta)\theta/2} \end{aligned}$$

može napisati u obliku

$$(2.61) \quad \mu_0^{(\alpha, \beta)} = 2^{\alpha+\beta} e^{-i\alpha\pi/2} \int_0^\pi e^{i(\alpha+\beta)\theta/2} \sin^\alpha \frac{\theta}{2} \cos^\beta \frac{\theta}{2} d\theta.$$

Nakon smene promenljive

$$\theta = (t + 1) \frac{\pi}{2}$$

iz (2.61) se dobija

$$(2.62) \quad \mu_0^{(\alpha, \beta)} = 2^{\alpha+\beta-1} \pi e^{i(\beta-\alpha)\pi/4} \times \int_{-1}^1 e^{i(\alpha+\beta)t\pi/4} \left[\frac{\sin((t+1)\pi/4)}{t+1} \right]^\alpha \left[\frac{\cos((t+1)\pi/4)}{1-t} \right]^\beta w^{(\beta, \alpha)}(t) dt,$$

gde je integrand (izuzev težinske funkcije $w^{(\beta, \alpha)}$) sada regularan na $[-1, 1]$. Za numeričko računanje $\mu_0^{(\alpha, \beta)}$ prema (2.62) mogu se koristiti Gauss–Jacobi-eve kvadrature sa parametrima (β, α) .

Znajući $\mu_0^{(\alpha, \beta)}$ prema (2.16), (2.27) i (2.24) možemo generisati matricu (2.39) i računati nule polinoma $\pi_n^{(\alpha, \beta)}$ procedurom opisanom u poglavlju 2.4.1.

Dobijeni numerički rezultati ukazuju da su sve nule polinoma $\pi_n^{(\alpha, \beta)}$ za $n \geq 2$ proste i da se nalaze u poludisku $D_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \text{Im } z > 0\}$.

2.6 Gauss–Gegenbauer-ove kvadrature na polukrugu

U odeljku 2.4.2 je pokazano da su za Gegenbauer-ove težinske funkcije

$$w(z) = (1 - z^2)^{\lambda-1/2}, \quad \lambda > -\frac{1}{2}$$

sve nule polinoma $\pi_n^\lambda(z)$ ($n \geq 2$) proste i nalaze se u poludisku $D_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \text{Im } z > 0\}$ (teoreme 2.7. i 2.8.).

U ovom poglavlju ćemo razmotriti konstruisanje Gauss–Christoffel-ovih kvadratura na polukrugu sa Gegenbauer-ovim težinskim funkcijama

$$(2.63) \quad \int_0^\pi f(e^{i\theta}) w(e^{i\theta}) d\theta = \sum_{\nu=1}^n \sigma_\nu f(\zeta_\nu) + R_n(f)$$

koje su tačne za sve algebarske polinome stepena ne višeg od $2n - 1$, tj. $R_n(f) = 0$ za sve $f \in \mathcal{P}_{2n-1}$. Čvorovi $\zeta_\nu = \zeta_\nu^{(n)}$ su nule polinoma $\pi_n(z) = \pi_n^\lambda(z)$.

Označimo sa $\tilde{\pi}_k(z) = \pi_k(z)/\|\pi_k\|$ ortonormirane polinome i sa

$$\tilde{\boldsymbol{\pi}}(z) = [\tilde{\pi}_0(z) \ \tilde{\pi}_1(z) \ \dots \ \tilde{\pi}_{n-1}(z)]^T$$

vektor prvih n od njih. Tada je $\tilde{\pi}_n(\zeta_\nu) = 0$ ako i samo ako je

$$J_n \tilde{\boldsymbol{\pi}}(\zeta_\nu) = \zeta_\nu \tilde{\boldsymbol{\pi}}(\zeta_\nu),$$

gde je J_n Jacobi-eva matrica

$$(2.64) \quad J_n = \begin{bmatrix} i\alpha_0 & \theta_0 & & & 0 \\ \theta_0 & i\alpha_1 & \theta_1 & & \\ & \theta_1 & i\alpha_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \theta_{n-2} \\ 0 & & & \theta_{n-2} & i\alpha_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Čvorovi ζ_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) su sopstvene vrednosti matrice J_n , a $\tilde{\pi}(\zeta_\nu)$ odgovarajući sopstveni vektori. Definišimo

$$\mathbf{p}(z) = D_n^{-1} \tilde{\pi}(z),$$

gde je, kao i u odeljku 2.4.1,

$$D_n = \text{diag}(1, i\theta_0, i^2\theta_0\theta_1, i^3\theta_0\theta_1\theta_2, \dots, i^{n-1}\theta_0\theta_1 \dots \theta_{n-2}) \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Tada dolazimo do novog problema sopstvenih vrednosti

$$A_n \mathbf{p}(\zeta_\nu) = \eta_\nu \mathbf{p}(\zeta_\nu),$$

tj. $\mathbf{p}(\zeta_\nu)$ je sopstveni vektor realne matrice $A_n = -iD_n^{-1}J_nD_n$ koji odgovara sopstvenoj vrednosti $\eta_\nu = -i\zeta_\nu$. Označimo sa V_n matricu sopstvenih vektora matrice A_n , normalizovanih tako da su im prve komponente jednake 1. Tada je

$$V_n = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n], \quad \mathbf{v}_\nu = \sqrt{\pi} \mathbf{p}(\zeta_\nu).$$

Zamenjujući u (2.63) $f(z) = \tilde{\pi}_k(z)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$), dobija se

$$\sum_{\nu=1}^n \sigma_\nu \tilde{\pi}_k(\zeta_\nu) = \frac{\mu_0}{\sqrt{\pi}} \delta_{k0} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

gde je

$$\mu_0 = \int_0^\pi w(e^{i\theta}) d\theta = \pi w(0) = \pi$$

i δ_{k0} Kronecker-ova delta.

Ako označimo $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \dots \ \sigma_n]^T$ onda se gornji sistem može zapisati u obliku

$$(2.65) \quad V_n \boldsymbol{\sigma} = \pi \mathbf{e}_1,$$

gde je $\mathbf{e}_1 = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ prvi koordinatni vektor.

Težinski koeficijenti σ_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) su rešenja sistema (2.65).

3

S-ortogonalnost i konstrukcija kvadrature formula Gauss-Turán-ovog tipa

Prve ideje o kvadraturama kod kojih se čvorovi i težinski koeficijenti određuju iz uslova maksimalne moguće tačnosti potiču još iz XVII veka (Newton i Cotes). Oslanjajući se na radove Newton-a i Cotes-a i svoj rad o hipergeometrijskim razvojem iz 1812 godine, C.F. Gauss je 1814 razvio metod za integraciju, koji značajno poboljšava dotad poznate Newton-Cotes-ove formule. Gauss-ove rezultate je po formi pojednostavio Jacobi 1826 godine. U XIX veku Gauss-ove kvadrature su detaljnije razrađivali i dalje razvijali Mehler, Christoffel i drugi. Dobijene rezultate su sistematizovali i uobličili u teoriju Chirstoffel 1877, Radau 1880 i Heine 1881. Ovaj metod integracije danas se obično naziva Gauss-Christoffel-ov metod.

Više od sto godina nakon što je Gauss objavio svoj čuveni metod aproksimacije integrala, pojavila se ideja o numeričkoj integraciji koja uključuje višestruke čvorove. Uzimajući bilo koji sistem od n različitih tačaka $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$ i n nenegativnih celih brojeva $m_1, m_2, \dots, m_n$, polazeći od Hermite-ove interpolacione formule L. Chakalov je 1948 izveo kvadraturnu formulu

$$(3.1) \quad \int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{\nu=1}^n [A_{0,\nu} f(\tau_\nu) + A_{1,\nu} f'(\tau_\nu) + \dots + A_{m_\nu-1,\nu} f^{(m_\nu-1)}(\tau_\nu)] ,$$

koja je tačna za sve polinome stepena najviše $m_1 + m_2 + \dots + m_n - 1$.

Uzimajući u (3.1) $m_1 = m_2 = \dots = m_n = k$, Turán je 1950 proučavao kvadrature formule oblika

$$(3.2) \quad \int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{\nu=1}^n A_{i,\nu} f^{(i)}(\tau_\nu) + R_{n,k}(f) ,$$

gde je

$$A_{i,\nu} = \int_{-1}^1 \ell_{\nu,i}(t) dt \quad (\nu = 1, 2, \dots, n; \quad i = 0, 1, \dots, k-1),$$

a $\ell_{\nu,i}(t)$ su fundamentalni polinomi Hermite-ove interpolacije. Koeficijenti $A_{i,\nu}$ nazivaju se Cotes-ovi brojevi višeg reda.

Označimo sa $\mathcal{P}_m$ skup svih algebarskih polinoma stepena najviše m . Težinski koeficijenti u formuli (3.2) se mogu odrediti tako da ona bude tačna za sve $f \in \mathcal{P}_{kn-1}$, za bilo koji izbor čvorova $-1 \leq \tau_1 < \dots < \tau_n \leq 1$.

Specijalno, za $k = 1$ formula (3.2) postaje

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{\nu=1}^n A_{0,\nu} f(\tau_\nu) + R_{n,1}(f).$$

Poslednja formula je tačna za sve polinome stepena ne višeg od $2n-1$ ako za čvorove τ_ν uzmemo nule Legendre-ovog polinoma P_n . To je poznata Gauss-Legendre-ova kvadratura formula.

Obzirom na stepen tačnosti Gauss-Christoffel-ovih formula, postavlja se pitanje da li se čvorovi u kvadraturnoj formuli (3.2) mogu izabrati tako da ona bude tačna za sve algebarske polinome stepena najviše $(k+1)n-1$. Turán je pokazao da je odgovor negativan za $k = 2$ i pozitivan za $k = 3$. Dokazao je da za čvorove τ_ν treba uzeti nule moničnog polinoma $\pi_n^* = t^n + \dots$ koji minimizira integral

$$\int_{-1}^1 [\pi_n(t)]^4 dt,$$

gde je $\pi_n(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0$.

U opštem slučaju odgovor je negativan za parne, a pozitivan za neparne k i τ_ν su nule polinoma koji minimizira

$$\int_{-1}^1 [\pi_n(t)]^{k+1} dt.$$

Dakle, k mora biti neparan broj. Neka je zato $k = 2s + 1$, ($s \geq 0$). Umesto formule (3.2) možemo posmatrati opštije kvadraturene formule Gauss-Turán-ovog tipa

$$(3.3) \quad \int_{\mathbb{R}} f(t) d\lambda(t) = \sum_{i=0}^{2s} \sum_{\nu=1}^n A_{i,\nu} f^{(i)}(\tau_\nu) + R_{n,2s}(f),$$

gde je $d\lambda(t)$ nenegativna mera na realnoj pravoj $\mathbb{R}$ sa kompaktnim ili beskonačnim nosačem, za koju svi momenti

$$\mu_k = \int_{\mathbb{R}} t^k d\lambda(t) \quad (k = 0, 1, \dots)$$

postoje i konačni su i $\mu_0 > 0$. Poznato je da je formula (3.3) tačna za sve polinome stepena ne višeg od $2(s+1)n-1$. Čvorovi τ_ν ($\nu = 1, \dots, n$) in (3.3) su nule moničnog polinoma $\pi_{n,s}(t)$ koji minimizira integral

$$F(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = \int_{\mathbb{R}} [\pi_n(t)]^{2s+2} d\lambda(t),$$

gde je $\pi_n(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0$. Minimizacija dovodi do uslova

$$(3.4) \quad \int_{\mathbb{R}} [\pi_n(t)]^{2s+1} t^k d\lambda(t) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Polinomi $\pi_n = \pi_{n,s}$ koji zadovoljavaju uslov (3.4) poznati su kao s -ortogonalni polinomi na realnoj pravoj $\mathbb{R}$ sa merom $d\lambda(t)$. Slučaj $d\lambda(t) = w(t) dt$ na $[a, b]$ (s -ortogonalni polinomi na intervalu $[a, b]$ sa težinskom funkcijom w) izučavali su italijanski matematičari Ossicini, Ghizzetti, Guerra i drugi. Njihove osobine će biti date detaljnije u narednom poglavlju. Specijalno za $s = 0$ imamo standardne ortogonalne polinome sa merom $d\lambda(t)$ (odnosno sa težinskom funkcijom w).

3.1 S -ortogonalni polinomi sa datom težinskom funkcijom

Neka je na intervalu $[a, b]$ definisana težinska funkcija $w(x)$, koja je merljiva i nenegativna i $w(x) > 0$ na skupu pozitivne mere. Neka je dalje $w(x) \in L[a, b]$ ako je interval $[a, b]$ konačan, odnosno $w(x)x^n \in L[a, b]$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) ako je interval $[a, b]$ beskonačan. Neka je unapred dat niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ brojeva različitih od nule.

Za fiksirani ceo broj $s > 0$ posmatrajmo niz polinoma $(\pi_{n,s}(x))_{n \in \mathbb{N}}$, gde je $\pi_{n,s}(x)$ polinom stepena n kod koga je koeficijent uz x^n jednak a_n takav da važi

$$(3.5) \quad \int_a^b \pi_{m,s}(x) [\pi_{n,s}(x)]^{2s+1} w(x) dx = 0 \quad \text{za sve } m < n,$$

ili ekvivalentno

$$(3.6) \quad \int_a^b \Pi_{n-1}(x) [\pi_{n,s}(x)]^{2s+1} w(x) dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

gde je $\Pi_{n-1}(x)$ proizvoljan polinom iz klase $\mathcal{P}_{n-1}$.

TEOREMA 3.1. *Postoji niz polinoma $(\pi_{n,s}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ koji zadovoljava uslov (3.6).*

Ghizzetti i Ossicini [15] su egzistenciju polinoma $\pi_{n,s}(x)$ pokazali korišćenjem sledeće teoreme funkcionalne analize:

Ako je S linearan i normiran prostor, fiksirajući n proizvoljnih linearno nezavisnih njegovih tačaka $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$, za svaku tačku $u \in S$ postoji linearna kombinacija $\sum_{k=0}^{n-1} c_k u_k$ tačaka $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ koja je najbolja aproksimacija tačke u (u smislu da je vrednost $\|u - \sum_{k=0}^{n-1} c_k u_k\|$ minimalna).

Prostor S u ovom slučaju je prostor $L^{2s+2}[a, b]$ svih funkcija $u = u(x)$ merljivih na $[a, b]$ za koje je $\int_a^b |u(x)|^{2s+2} dx < +\infty$. Ovaj prostor je linearan i normiran sa normom

$$\|u\| = \left(\int_a^b |u(x)|^{2s+2} dx \right)^{\frac{1}{2s+2}}.$$

Ako u $L^{2s+2}[a, b]$ fiksiramo n tačaka $u_k = x^k [w(x)]^{\frac{1}{2s+2}}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) tada, prema datoj teoremi, za tačku $u = a_n x^n [w(x)]^{\frac{1}{2s+2}}$ postoje konstante $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ takve da je norma

$$\left\| u - \sum_{k=0}^{n-1} c_k u_k \right\| = \left(\int_a^b \left[a_n x^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k \right]^{2s+2} w(x) dx \right)^{\frac{1}{2s+2}}$$

minimalna, tj. za svako n i za svaki izbor $a_n \neq 0$ postoji polinom stepena n

$$\pi_{n,s}(x) = a_n x^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k$$

takav da je vrednost

$$(3.7) \quad \int_a^b [\pi_{n,s}(x)]^{2s+2} w(x) dx$$

minimalna.

Dakle, svaka od n funkcija

$$F_k(\lambda) = \int_a^b [\pi_{n,s}(x) + \lambda x^k]^{2s+2} w(x) dx \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

mora imati izvod jednak nuli za $\lambda = 0$. Kako je

$$F'_k(\lambda) = (2s+2) \int_a^b x^k [\pi_{n,s}(x) + \lambda x^k]^{2s+1} w(x) dx,$$

to uslov $F'_k(0) = 0$ daje

$$\int_a^b x^k [\pi_{n,s}(x)]^{2s+1} w(x) dx = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

što znači da polinom $\pi_{n,s}(x)$ zadovoljava (3.6). Prema tome, za svako n postoji polinom $\pi_{n,s}(x) = a_n x^n + \dots$ koji zadovoljava tražene uslove.

TEOREMA 3.2. *Niz polinoma $(\pi_{n,s}(x))_{n \in \mathbb{N}}$, s -ortogonalnih na intervalu $[a, b]$ sa težinskom funkcijom w , je jedinstven.*

DOKAZ: Petpostavimo da postoji drugi niz s -ortogonalnih polinoma $(Q_{n,s}(x))_{n \in \mathbb{N}}$, $Q_{n,s}(x) = a_n x^n + \dots$. Tada je

$$\deg(\pi_{n,s}(x) - Q_{n,s}(x)) \leq n - 1,$$

pa je zbog (3.6)

$$\int_a^b [\pi_{n,s}(x) - Q_{n,s}(x)] [\pi_{n,s}(x)]^{2s+1} w(x) dx = 0$$

i

$$\int_a^b [\pi_{n,s}(x) - Q_{n,s}(x)] [Q_{n,s}(x)]^{2s+1} w(x) dx = 0,$$

odakle je

$$\int_a^b [\pi_{n,s}(x) - Q_{n,s}(x)] \{ [\pi_{n,s}(x)]^{2s+1} - [Q_{n,s}(x)]^{2s+1} \} w(x) dx = 0,$$

odnosno

$$\int_a^b [\pi_{n,s}(x) - Q_{n,s}(x)]^2 \sum_{k=0}^{2s} [\pi_{n,s}(x)]^{2s-k} [Q_{n,s}(x)]^k w(x) dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

U poslednjem integralu, prvi faktor integranda, $[\pi_{n,s}(x) - Q_{n,s}(x)]^2$, je nenegativan, drugi faktor (suma) je pozitivan osim u konačno mnogo tačaka i treći faktor, $w(x)$, je pozitivan na skupu pozitivne mere, pa prethodna jednakost važi samo ako je prvi faktor integranda identički jednak nuli, tj. ako je $Q_{n,s}(x) \equiv \pi_{n,s}(x)$. ■

Iz teoreme 3.2. sledi da ako koeficijenti a_n uz x^n nisu unapred zadati, već samo uslov s -ortogonalnosti (3.5), onda su polinomi $\pi_{n,s}(x)$ jedinstveni do na konstantan faktor.

TEOREMA 3.3. *Nule s -ortogonalnih polinoma $\pi_{n,s}(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) sa težinskom funkcijom w su realne, različite i leže unutar intervala $[a, b]$.*

DOKAZ: Neka su $x_1, x_2, \dots, x_m$ ($0 \leq m \leq n$) moguće realne nule neparne višestrukosti polinoma $\pi_{n,s}(x)$ koje leže unutar intervala $[a, b]$. Dokazaćemo da je $m = n$.

Neka je

$$\Pi_m(x) = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ \prod_{i=1}^m (x - x_i), & m = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Tada $\Pi_m(x)\pi_{n,s}(x)$ ne menja znak na intervalu $[a, b]$, pa je

$$\int_a^b \Pi_m(x)[\pi_{n,s}(x)]^{2s+1}w(x) dx \neq 0$$

što je nemoguće za $m < n$. Dakle, mora biti $m = n$. ■

Označimo sa $\tau_i^{(k)}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) nule polinoma $\pi_{k,s}$ uređene po veličini, tj.

$$\tau_1^{(k)} < \tau_2^{(k)} < \dots < \tau_k^{(k)}.$$

TEOREMA 3.4. (Milovanović [24, Teorema 2.2]) *Za svako $s \in \mathbb{N}_0$ za nule polinoma $\pi_{n,s}$ i $\pi_{n+1,s}$ važi:*

$$\tau_1^{(n+1)} < \tau_1^{(n)} < \tau_2^{(n+1)} < \dots < \tau_n^{(n+1)} < \tau_n^{(n)} < \tau_{n+1}^{(n+1)}.$$

TEOREMA 3.5. *Neka je interval $[a, b]$ oblika $[-c, c]$ i neka je $w(x)$ parna funkcija. Tada su polinomi $\pi_{n,s}(x)$ parni ili neparni u zavisnosti od toga da li je n parno ili neparno.*

DOKAZ: Definišimo I_n ($n = 1, 2, \dots$) sa

$$I_n = \int_{-c}^c \Pi_{n-1}(x)[\pi_{n,s}(-x)]^{2s+1}w(x) dx, \quad \Pi_{n-1}(x) \in \mathcal{P}_{n-1}.$$

Nakon smene $x = -t$ dobija se

$$I_n = \int_{-c}^c \Pi_{n-1}(-t)[\pi_{n,s}(t)]^{2s+1}w(t) dt,$$

odakle je $I_n = 0$. To znači da se polinomi $\pi_{n,s}(-x)$ i $\pi_{n,s}(x)$ razlikuju samo za konstantan faktor, tj. $\pi_{n,s}(-x) = (-1)^n \pi_{n,s}(x)$, odakle sledi tvrđenje teoreme. ■

3.2 Numerička konstrukcija s -ortogonalnih polinoma

Uslov ortogonalnosti za s -ortogonalne polinome $\pi_{n,s} = \pi_{n,s}(\cdot; d\lambda)$ dat je, dakle, sa (3.4), tj. sa

$$(3.8) \quad \int_{\mathbb{R}} [\pi_{n,s}(t)]^{2s+1} \pi_{k,s}(t) d\lambda(t) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Na III konferenciji numeričkih metoda i teorije aproksimacija (Niš, 1987) Milovanović [20] je dao stabilan metod za numeričku konstrukciju s -ortogonalnih polinoma i njihovih nula. Korišćen je metod sa kvadratnom konvergencijom baziran na diskretizovanoj Stieltjes-ovoj proceduri i metodu Newton-Kantorovič-a.

Osnovna ideja ovog metoda za numeričku konstrukciju s -ortogonalnih polinoma sa merom $d\lambda(t)$ na realnoj pravoj $\mathbb{R}$ je u reinterpretaciji uslova ortogonalnosti (3.8). Za date n i s definišimo $d\mu(t) = d\mu^{(n,s)}(t) = (\pi_{n,s}(t))^{2s} d\lambda(t)$. Uslov ortogonalnosti se onda svodi na

$$\int_{\mathbb{R}} \pi_k^{(n,s)}(t) t^\nu d\mu(t) = 0 \quad (\nu = 0, 1, \dots, k-1),$$

gde je $(\pi_k^{(n,s)})$ niz moničnih ortogonalnih polinoma sa novom merom $d\mu(t)$. Tada je $\pi_{n,s}(\cdot) = \pi_n^{(n,s)}(\cdot)$. Polinomi $\pi_k^{(n,s)}$ ($k = 0, 1, \dots$) su implicitno definisani, jer mera $d\mu(t)$ zavisi od $\pi_n^{(n,s)}(t)$. Opštu klasu takvih polinoma uveo je i proučavao Engels [8, str. 214-226]. Radi kraćeg zapisa umesto $\pi_k^{(n,s)}(\cdot)$ pišaćemo $\pi_k(\cdot)$. Ovi polinomi zadovoljavaju tročlanu rekurentnu relaciju

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \pi_{\nu+1}(t) &= (t - \alpha_\nu) \pi_\nu(t) - \beta_\nu \pi_{\nu-1}(t) \quad (\nu = 0, 1, \dots), \\ \pi_{-1}(t) &= 0, \quad \pi_0(t) = 1, \end{aligned}$$

gde je, zbog ortogonalnosti,

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \alpha_\nu &= \alpha_\nu(n, s) = \frac{(t\pi_\nu, \pi_\nu)}{(\pi_\nu, \pi_\nu)} = \frac{\int_{\mathbb{R}} t\pi_\nu^2(t) d\mu(t)}{\int_{\mathbb{R}} \pi_\nu^2(t) d\mu(t)}, \\ \beta_\nu &= \beta_\nu(n, s) = \frac{(\pi_\nu, \pi_\nu)}{(\pi_{\nu-1}, \pi_{\nu-1})} = \frac{\int_{\mathbb{R}} \pi_\nu^2(t) d\mu(t)}{\int_{\mathbb{R}} \pi_{\nu-1}^2(t) d\mu(t)}, \end{aligned}$$

i po konvenciji $\beta_0 = \int_{\mathbb{R}} d\mu(t)$.

Koeficijenti α_ν i β_ν su fundamentalne veličine u konstruktivnoj teoriji ortogonalnih polinoma. Oni omogućavaju reprezentovanje ortogonalnih polinoma, zahtevajući linearan niz parametara. Nasuprot njima, koeficijenti ortogonalnih polinoma ili njihove nule zahtevaju dvodimenzionalne nizove. Poznavanje koeficijenata α_ν i β_ν ($\nu = 0, 1, \dots, n-1$) omogućava nalaženje prvih $n+1$ ortogonalnih polinoma $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n$. Za dato n poslednji od njih, π_n , je s -ortogonalan polinom $\pi_n^{(n,s)}$.

Stabilna procedura za nalaženje koeficijenata α_ν , β_ν je diskretizovana Stieltjes-ova procedura (stabilnost posebno dolazi do izražaja u slučaju beskonačnih intervala integracije [9, 11]). Međutim, u slučaju s -ortogonalnih polinoma ova procedura ne može biti direktno primenjena jer mera $d\mu(t)$ zavisi od nepoznatog polinoma $\pi_n^{(n,s)}$. Iz (3.10) se dobija sledeći sistem nelinearnih jednačina sa nepoznatim $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$

$$(3.11) \quad \begin{aligned} f_0 &\equiv \beta_0 - \int_{\mathbb{R}} \pi_n^{2s}(t) d\lambda(t) = 0, \\ f_{2\nu+1} &\equiv \int_{\mathbb{R}} (\alpha_\nu - t) \pi_\nu^2(t) \pi_n^{2s}(t) d\lambda(t) = 0 \quad (\nu = 0, 1, \dots, n-1), \\ f_{2\nu} &\equiv \int_{\mathbb{R}} (\beta_\nu \pi_{\nu-1}^2(t) - \pi_\nu^2(t)) \pi_n^{2s}(t) d\lambda(t) = 0 \quad (\nu = 1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Obeležimo sa $\mathbf{x}$ $2n$ -dimenzionalan vektor sa elementima $\alpha_0, \beta_0, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}$, sa $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ $2n$ -dimenzionalan vektor sa elementima $f_0, f_1, \dots, f_{2n-1}$, datim sa (3.11), gde su $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n$ predstavljeni na osnovu (3.9). Ako je $\mathbf{W}=\mathbf{W}(\mathbf{x})$ odgovarajući Jacobian od $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, onda se koeficijenti rekurentne relacije (3.9) mogu odrediti metodom Newton-Kantoroviča [14, 27]

$$(3.12) \quad \mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{x}^{[k]}) \mathbf{f}(\mathbf{x}^{[k]}) \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Za dovoljno dobro odabranu početnu iteraciju $\mathbf{x}^{[0]}$ metod (3.12) ima kvadratnu konvergenciju.

Da bi izračunali elemente Jacobiana prvo ćemo odrediti parcijalne izvode $a_{\nu,i} = \frac{\partial \pi_\nu}{\partial \alpha_i}$ i $b_{\nu,i} = \frac{\partial \pi_\nu}{\partial \beta_i}$. Diferenciranjem rekurentne relacije (3.9) po α_i i β_i dobijamo

$$a_{\nu+1,i} = (t - \alpha_\nu) a_{\nu,i} - \beta_\nu a_{\nu-1,i}, \quad b_{\nu+1,i} = (t - \alpha_\nu) b_{\nu,i} - \beta_\nu b_{\nu-1,i},$$

gde je

$$\begin{aligned} a_{\nu,i} &= 0, & b_{\nu,i} &= 0 & (\nu \leq i), \\ a_{i+1,i} &= -\pi_i(t), & b_{i+1,i} &= -\pi_{i-1}(t). \end{aligned}$$

Elementi Jacobiana su

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{2\nu+1}}{\partial \alpha_i} &= 2 \int_{\mathbb{R}} \pi_n^{2s-1}(t) \left[(\alpha_\nu - t) p_{\nu,i}(t) + \frac{1}{2} \delta_{\nu,i} \pi_\nu^2(t) \pi_n(t) \right] d\lambda(t), \\ \frac{\partial f_{2\nu+1}}{\partial \beta_i} &= 2 \int_{\mathbb{R}} \pi_n^{2s-1}(t) (\alpha_\nu - t) q_{\nu,i}(t) d\lambda(t), \\ \frac{\partial f_{2\nu}}{\partial \alpha_i} &= 2 \int_{\mathbb{R}} \pi_n^{2s-1}(t) (\beta_\nu p_{\nu-1,i}(t) - p_{\nu,i}(t)) d\lambda(t), \\ \frac{\partial f_{2\nu}}{\partial \beta_i} &= 2 \int_{\mathbb{R}} \pi_n^{2s-1}(t) \left[(\beta_\nu q_{\nu-1,i}(t) - q_{\nu,i}(t)) + \frac{1}{2} \delta_{\nu,i} \pi_{\nu-1}^2(t) \pi_n(t) \right] d\lambda(t), \end{aligned} \quad (3.13)$$

gde je

$$p_{\nu,i}(t) = \pi_\nu(t) (a_{\nu,i} \pi_n(t) + s a_{n,i} \pi_\nu(t)), \quad q_{\nu,i}(t) = \pi_\nu(t) (b_{\nu,i} \pi_n(t) + s b_{n,i} \pi_\nu(t)),$$

i $\delta_{\nu,i}$ Kronecker-ova delta.

Svi integrali u (3.11) i (3.13) mogu se izračunati tačno, izuzimajući greške zaokruživanja, koristeći Gauss-Christoffel-ove kvadraturene formule sa merom $d\lambda(t)$,

$$(3.14) \quad \int_{\mathbb{R}} g(t) d\lambda(t) = \sum_{\nu=1}^N A_\nu^{(N)} g(\tau_\nu^{(N)}) + R_N(g),$$

uzimajući $N = (s+1)n$ čvorova. Formula (3.14) je tačna za sve polinome stepena ne višeg od $2N - 1 = 2(s+1)n - 1 = 2(n-1) + 2ns + 1$.

Prema tome, za sva izračunavanja koristi se samo fundamentalna tročlana rekurentna relacija (3.9) za ortogonalne polinome $\pi_k(\cdot; d\lambda)$ i Gauss-Christoffel-ove kvadrature (3.14). Za početne vrednosti $\alpha_\nu^{[0]} = \alpha_\nu^{[0]}(n, s)$ i $\beta_\nu^{[0]} = \beta_\nu^{[0]}(n, s)$ uzimaju se vrednosti dobijene za $n-1$, tj. $\alpha_\nu^{[0]} = \alpha_\nu(n-1, s)$, $\beta_\nu^{[0]} = \beta_\nu(n-1, s)$ ($\nu \leq n-2$). Za $\alpha_{n-1}^{[0]}$ i $\beta_{n-1}^{[0]}$ koristimo odgovarajuće ekstrapolirane vrednosti.

U slučaju $n = 1$ rešavamo jednačinu

$$\phi(\alpha_0) = \phi(\alpha_0(1, s)) = \int_{\mathbb{R}} (t - \alpha_0)^{2s+1} d\lambda(t) = 0,$$

pa zatim određujemo

$$\beta_0 = \beta_0(1, s) = \int_{\mathbb{R}} (t - \alpha_0)^{2s} d\lambda(t).$$

Znajući koeficijente u tročlanoj rekurentnoj relaciji (3.9) lako se mogu odrediti i nule polinoma $\pi_n^{(n,s)}$, što će biti pokazano u sledećem poglavlju.

3.3 Gauss-Turán-ove kvadraturene formule

U uvodnom delu ove glave bilo je reči o kvadrturnim formulama Gauss-Turán-ovog tipa (3.3), tj.

$$(3.15) \quad \int_{\mathbb{R}} f(t) d\lambda(t) = \sum_{i=0}^{2s} \sum_{\nu=1}^n A_{i,\nu} f^{(i)}(\tau_\nu) + R(f),$$

koje imaju maksimalni algebarski stepen tačnosti $2(s+1)n - 1$.

Čvorovi $\tau_\nu = \tau_\nu(n, s)$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) u (3.15) su nule s -ortogonalnog polinoma $\pi_n(t) \equiv \pi_n^{(n,s)}(t)$ i mogu se jednostavno izračunati kao sopstvene vrednosti trodijagonalne simetrične Jacobi-eve matrice

$$J_n = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & 0 \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & \sqrt{\beta_2} & \alpha_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \sqrt{\beta_{n-1}} \\ 0 & & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

QR algoritmom ($\alpha_\nu = \alpha_\nu(n, s)$, $\beta_\nu = \beta_\nu(n, s)$ ($\nu = 0, 1, \dots, n-1$)).

Da bi odredili koeficijente $A_{i,\nu}$ u kvadrturnim formulama Gauss-Turán-ovog tipa (3.15) definišimo najpre

$$(3.16) \quad \Omega_\nu(t) = \left(\frac{\pi_n(t)}{t - \tau_\nu} \right)^{2s+1} = \prod_{i \neq \nu} (t - \tau_i)^{2s+1} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n).$$

Tada se koeficijenti $A_{i,\nu}$ mogu predstaviti u obliku

$$A_{i,\nu} = \frac{1}{i!(2s-i)!} \left[D^{2s-i} \frac{1}{\Omega_\nu(t)} \int_{\mathbb{R}} \frac{\pi_n^{2s+1}(x) - \pi_n^{2s+1}(t)}{x-t} d\lambda(x) \right]_{t=\tau_\nu},$$

gde je D operator diferenciranja. Specijalno, za $i = 2s$ je

$$A_{2s,\nu} = \frac{1}{(2s)!(\pi'_n(\tau_\nu))^{2s+1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\pi_n^{2s+1}(x)}{x-\tau_\nu} d\lambda(x),$$

odnosno

$$A_{2s,\nu} = \frac{B_\nu^{(s)}}{(2s)!(\pi'_n(\tau_\nu))^{2s}} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n),$$

gde su $B_\nu^{(s)}$ Christoffel-ovi brojevi Gauss-ove kvadrature formule

$$\int_{\mathbb{R}} g(t) d\mu(t) = \sum_{\nu=1}^n B_\nu^{(s)} g(\tau_\nu) + R_n(g), \quad R_n(\mathcal{P}_{2n-1}) = 0,$$

sa merom $d\mu(t) = \pi_n^{2s}(t) d\lambda(t)$.

Pošto je $B_\nu^{(s)} > 0$ to je i $A_{2s,\nu} > 0$. Izrazi za ostale koeficijente $A_{i,\nu}$ ($i < 2s$) su vrlo komplikovani. Za njihovo numeričko računanje Gautschi [9] je koristio trougaoni sistem linearnih jednačina dobijen iz formule (3.15) zamenjujući funkciju f Newton-ovim polinomima:

$$1, t - \tau_1, \dots, (t - \tau_1)^{2s+1}, (t - \tau_1)^{2s+1}(t - \tau_2), \dots, (t - \tau_1)^{2s+1}(t - \tau_2)^{2s+1} \dots (t - \tau_n)^{2s}.$$

Gautschi i Milovanović [14] su umesto Newton-ovih polinoma koristili polinome

$$\begin{aligned} f_{k,\nu}(t) &= (t - \tau_\nu)^k \Omega_\nu(t) \\ (3.17) \quad &= (t - \tau_\nu)^k \prod_{i \neq \nu} (t - \tau_i)^{2s+1} \end{aligned} \quad (0 \leq k \leq 2s, 1 \leq \nu \leq n).$$

Kako je kvadratura formula (3.15) tačna za sve polinome stepena ne višeg od $2(s+1)n - 1$ i $\deg f_{k,\nu} = (n-1)(2s+1) + k \leq (2s+1)n - 1$, to je formula (3.15) tačna za polinome (3.17), odnosno $R(f_{k,\nu}) = 0$ ($0 \leq k \leq 2s, 1 \leq \nu \leq n$). Prema tome, važi

$$(3.18) \quad \sum_{i=0}^{2s} \sum_{j=1}^n A_{i,j} f_{k,\nu}^{(i)}(\tau_j) = \int_{\mathbb{R}} f_{k,\nu}(t) d\lambda(t) \quad (0 \leq k \leq 2s, 1 \leq \nu \leq n).$$

Definišimo momente

$$\mu_{k,\nu} = \int_{\mathbb{R}} f_{k,\nu}(t) d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} (t - \tau_\nu)^k \prod_{i \neq \nu} (t - \tau_i)^{2s+1} d\lambda(t).$$

Tada iz sistema (3.18) dobijamo sistem

$$(3.19) \quad \sum_{i=0}^{2s} A_{i,\nu} f_{k,\nu}^{(i)}(\tau_\nu) = \mu_{k,\nu} \quad (0 \leq k \leq 2s, 1 \leq \nu \leq n),$$

jer je za svako $j \neq \nu$ i $0 \leq i \leq 2s$ $f_{k,\nu}^{(i)}(\tau_j) = 0$.

Za svako ν imamo u (3.19) sistem od $2s + 1$ linearnih jednačina sa nepoznatim $A_{i,\nu}$ ($i = 0, 1, \dots, 2s$).

Korišćenjem Leibniz-ove formule lako se dokazuje sledeći rezultat.

LEMA 3.1 *Za polinome $f_{k,\nu}$ date sa (3.17) važi*

$$f_{k,\nu}^{(i)}(\tau_\nu) = \begin{cases} 0, & i < k, \\ i^{(k)} \Omega_\nu^{(i-k)}(\tau_\nu), & i \geq k, \end{cases}$$

gde je $i^{(k)} = i(i-1)\cdots(i-k+1)$ ($0^{(0)} = 1$), a Ω_ν je definisano sa (3.16).

Na osnovu leme 3.1 zaključujemo da je svaki sistem linearnih jednačina (3.19) (za svako ν) gornje trougaoni. Pošto su sve nule s -ortogonalnog polinoma π_n (svi čvorovi kvadrature formule (3.15)) poznate to se određivanje koeficijenata $A_{i,\nu}$ svodi na rešavanje n linearnih sistema od $2s + 1$ jednačina

$$\begin{bmatrix} f_{0,\nu}(\tau_\nu) & f'_{0,\nu}(\tau_\nu) & \cdots & f_{0,\nu}^{(2s)}(\tau_\nu) \\ & f'_{1,\nu}(\tau_\nu) & \cdots & f_{1,\nu}^{(2s)}(\tau_\nu) \\ & & \ddots & \\ & & & f_{2s,\nu}^{(2s)}(\tau_\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{0,\nu} \\ A_{1,\nu} \\ \vdots \\ A_{2s,\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{0,\nu} \\ \mu_{1,\nu} \\ \vdots \\ \mu_{2s,\nu} \end{bmatrix}.$$

Ako uvedemo oznake $a_{k,k+j} = f_{k-1,\nu}^{(k-1+j)}(\tau_\nu)$, tada matrica sistema ima elemente $a_{\ell,j}$, ($1 \leq \ell, j \leq 2s + 1$). Pri tom je $a_{\ell,j} = 0$ za $j < \ell$. Tada je prema lemi 3.1

$$(3.20) \quad a_{\ell,j} = (j-1)^{(\ell-1)} \Omega_\nu^{(j-\ell)}(\tau_\nu) \quad (1 \leq \ell \leq j \leq 2s + 1).$$

LEMA 3.2 *Neka su $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ nule s -ortogonalnog polinoma π_n . Za elemente $a_{\ell,j}$, definisane sa (3.20) važe sledeće relacije:*

$$a_{k,k} = (k-1)! a_{1,1} \quad (1 \leq k \leq 2s + 1),$$

$$a_{k,k+j} = -(2s+1)(k+j-1)^{(k-1)} \sum_{\ell=1}^j u_\ell a_{\ell,j} \quad (1 \leq k \leq 2s-j+1, j = 1, \dots, 2s)$$

gde je

$$(3.21) \quad \begin{aligned} a_{1,1} &= \Omega_\nu(\tau_\nu) = [\pi_n'(\tau_\nu)]^{2s+1}, \\ u_\ell &= \sum_{i \neq \nu} (\tau_i - \tau_\nu)^{-\ell} \quad (\ell = 1, 2, \dots, 2s). \end{aligned}$$

DOKAZ: Prva relacija je neposredna posledica definicije $a_{k,k}$ i leme 3.1. Da bi dokazali drugu relaciju definišimo $v(t) = \sum_{i \neq \nu} (t - \tau_i)^{-1}$. Pošto je $\Omega_\nu(t) = \prod_{i \neq \nu} (t - \tau_i)^{2s+1}$ to je

$$\Omega'_\nu(t) = (2s+1)v(t)\Omega_\nu(t)$$

i

$$\begin{aligned} \Omega_\nu^{(j)}(t) &= \frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}} (\Omega'_\nu(t)) = (2s+1) \frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}} (v(t)\Omega_\nu(t)) \\ &= (2s+1) \sum_{\ell=0}^{j-1} \binom{j-1}{\ell} \Omega_\nu^{(j-1-\ell)}(t) v^{(\ell)}(t). \end{aligned}$$

Sada, (3.20) postaje

$$a_{k,k+j} = (k+j-1)^{(k-1)} (2s+1) \sum_{\ell=1}^j \binom{j-1}{\ell-1} v^{(\ell-1)}(\tau_\nu) \Omega_\nu^{(j-\ell)}(\tau_\nu).$$

Pošto je

$$v^{(\ell-1)}(\tau_\nu) = (-1)^{\ell-1} (\ell-1)! \sum_{i \neq \nu} (\tau_\nu - \tau_i)^{-\ell} = -(\ell-1)! u_\ell$$

i

$$\Omega_\nu^{(j-\ell)}(\tau_\nu) = \frac{a_{\ell,j}}{(j-1)^{(\ell-1)}} = \frac{(j-\ell)!}{(j-1)!} a_{\ell,j},$$

to je

$$a_{k,k+j} = -(2s+1)(k+j-1)^{(k-1)} \sum_{\ell=1}^j u_\ell a_{\ell,j}. \quad \blacksquare$$

Uvešćemo sledeće oznake:

$$(3.22) \quad \hat{a}_{k,j} = \frac{a_{k,j}}{(j-1)! a_{1,1}} \quad (1 \leq k, j \leq 2s+1),$$

$$b_k = (k-1) A_{k-1,\nu} \quad (1 \leq k \leq 2s+1),$$

$$(3.23) \quad \hat{\mu}_{k,\nu} = \frac{\mu_{k,\nu}}{(\pi'_n(\tau_\nu))^{2s+1}} = \int_{\mathbb{R}} (t - \tau_\nu)^k \left(\prod_{i \neq \nu} \frac{t - \tau_i}{\tau_\nu - \tau_i} \right)^{2s+1} d\lambda(t).$$

TEOREMA 3.6. Za fiksirano ν ($1 \leq \nu \leq n$), koeficijenti $A_{i,\nu}$ u kvadraturnim formulama Gauss-Turán-ovog tipa (3.15) određeni su relacijama

$$\begin{aligned} b_{2s+1} &= (2s)! A_{2s,\nu} = \hat{\mu}_{2s,\nu}, \\ b_k &= (k-1)! A_{k-1,\nu} = \hat{\mu}_{k-1,\nu} - \sum_{j=k+1}^{2s+1} \hat{a}_{k,j} b_j \quad (k = 2s, \dots, 1), \end{aligned}$$

gde je $\hat{\mu}_{k,\nu}$ dato sa (3.23) i

$$(3.24) \quad \begin{aligned} \hat{a}_{k,k} &= 1 & (k = 1, \dots, 2s) \\ \hat{a}_{k,k+j} &= -\frac{2s+1}{j} \sum_{\ell=1}^j u_\ell \hat{a}_{\ell,j} & (k = 1, \dots, 2s, \quad j = 1, \dots, 2s-k+1), \end{aligned}$$

a u u_ℓ je definisano sa (3.21).

DOKAZ: Relacija (3.24) dobija se direktno iz leme 3.2 i normalizacije (3.22).

Koeficijenti b_k ($1 \leq k \leq 2s+1$) dobijaju se iz odgovarajućeg gornje trougaonog sistema jednačina $\hat{A} \mathbf{b} = \mathbf{c}$, gde je

$$\hat{A} = [\hat{a}_{i,j}] , \quad \mathbf{b} = [b_1 \ \cdots \ b_{2s+1}]^T, \quad \mathbf{c} = [\hat{\mu}_{0,\nu} \ \cdots \ \hat{\mu}_{2s,\nu}]^T . \quad \blacksquare$$

Normalizovani momenti $\hat{\mu}_{k,\nu}$ (3.23) mogu se računati tačno, izuzimajući greške zaokrugljivanja, koristeći Gauss-Christoffel-ovu kvadraturnu formulu (3.14) sa $N = (s+1)n$ čvorova.

4

Višestruko ortogonalni polinomi

Višestruko ortogonalni polinomi (eng. *multiple orthogonal polynomials*) predstavljaju generalizaciju ortogonalnih polinoma u smislu da oni zadovoljavaju $r \in \mathbb{N}$ uslova ortogonalnosti. Izučavanje višestruko ortogonalnih polinoma je intenzivno poslednjih desetak godina i to najpre usko povezano sa izučavanjem Hermite-Padé-ove racionalne aproksimacije sistema Markov-ih funkcija u radovima Nikishin-a, Sorokin-a, Piñeiro-a, Aptekarev-a i drugih.

Poslednje četiri godine veliki doprinos ovoj oblasti dali su Belgijanci Van Assche i Coussement. Oni su posebno proučavali neke klase klasičnih višestruko ortogonalnih polinoma, kao i njihovu primenu u teoriji brojeva, pre svega za dokazivanje iracionalnosti i transcendentnosti određenih realnih brojeva [35, 36, 37, 3].

Neka je $r \geq 1$ ceo broj i neka su $w_1, w_2, \dots, w_r$ težinske funkcije na realnoj pravoj, takve da je nosač svake funkcije w_i podskup nekog intervala E_i . Neka je $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_r)$ vektor (uređena r -torka) nenegativnih celih brojeva, koja se zove *multi-indeks*, a $|\vec{n}| = n_1 + n_2 + \dots + n_r$ njegova dužina.

Postoje dva tipa višestruko ortogonalnih polinoma.

- **Višestruko ortogonalni polinomi tipa I**

Višestruko ortogonalni polinom tipa I predstavlja vektor

$$(4.1) \quad (A_{\vec{n},1}, A_{\vec{n},2}, \dots, A_{\vec{n},r}),$$

gde je $A_{\vec{n},i}$ ($i = 1, 2, \dots, r$) polinom stepena $n_i - 1$ i važe sledeći uslovi ortogonalnosti:

$$(4.2) \quad \sum_{j=1}^r \int_{E_j} A_{\vec{n},j}(x) x^k w_j(x) dx = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, |\vec{n}| - 2).$$

Svaki polinom $A_{\vec{n},i}$ ima n_i koeficijenata. Vektor (4.1) je kompletno određen ako možemo naći svih $|\vec{n}|$ nepoznatih koeficijenata. Uslovi ortogonalnosti (4.2)

daju sistem od $|\vec{n}| - 1$ homogenih linearnih jednačina za računanje ovih $|\vec{n}|$ koeficijenata. Ako je matrica tog sistema regularna tada možemo odrediti višestruko ortogonalne polinome tipa I jedinstveno do na multiplikativnu konstantu.

Za $r = 1$ imamo obične ortogonalne polinome.

• Višestruko ortogonalni polinomi tipa II

Pod višestruko ortogonalnim polinomom tipa II podrazumeva se moničan polinom $P_{\vec{n}}$ stepena $|\vec{n}|$ takav da zadovoljava sledeće uslove ortogonalnosti:

$$(4.3) \quad \int_{E_1} P_{\vec{n}}(x) x^k w_1(x) dx = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n_1 - 1),$$

$$(4.4) \quad \int_{E_2} P_{\vec{n}}(x) x^k w_2(x) dx = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n_2 - 1),$$

$\vdots$

$$(4.5) \quad \int_{E_r} P_{\vec{n}}(x) x^k w_r(x) dx = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n_r - 1).$$

Za $r = 1$ opet imamo obične ortogonalne polinome.

Uslovi ortogonalnosti (4.3)–(4.5) zajedno daju sistem od $|\vec{n}|$ linearnih jednačina za računanje $|\vec{n}|$ nepoznatih koeficijenata $a_{k,\vec{n}}$ polinoma $P_{\vec{n}}(x) = \sum_{k=0}^{|\vec{n}|} a_{k,\vec{n}} x^k$, gde je $a_{|\vec{n}|,\vec{n}} = 1$. Obzirom da matrica tog sistema može biti singularna, r težinskih funkcija moraju zadovoljavati dodatne uslove da bi višestruko ortogonalni polinomi tipa II bili jedinstveni.

Ako je polinom $P_{\vec{n}}(x)$ jedinstven tada kažemo da je $\vec{n}$ *normalan multi-indeks*, a ako su svi multi-indeksi normalni tada kažemo da r težinskih funkcija čini *kompletan sistem*.

Nadalje ćemo detaljno razmatrati višestruko ortogonalne polinome tipa II.

Za svaku težinsku funkciju w_k ($k = 1, 2, \dots, r$)

$$(4.6) \quad \langle f, g \rangle_k = \int_{E_k} f(x) g(x) w_k(x) dx$$

označava odgovarajući skalarni proizvod funkcija f i g .

4.1 Višestruko ortogonalni polinomi tipa II

Posmatraćemo sisteme od r težinskih funkcija za koje su svi multi-indeksi normalni. Postoje dva različita tipa sistema težinskih funkcija za koje se definišu višestruko ortogonalni polinomi tipa II.

1. *Angelesco sistemi* su takvi sistemi za koje su intervali E_i (nosači težinskih funkcija) disjunktni, tj. $E_i \cap E_j = \emptyset$ za $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq r$.

Napomena: Dovoljno je da otvoreni intervali $\overset{\circ}{E}_i$ budu disjunktni.

2. *AT sistemi* su takvi sistemi u kojima sve težinske funkcije imaju nosače u istom intervalu E i sledećih $|\vec{n}|$ funkcija

$$w_1(x), xw_1(x), \dots, x^{n_1-1}w_1(x), w_2(x), xw_2(x), \dots, x^{n_2-1}w_2(x), \\ \dots, w_r(x), xw_r(x), \dots, x^{n_r-1}w_r(x)$$

čine Chebyshev-ljev sistem na E za sve multi-indekse $\vec{n}$. To znači da svaka linearna kombinacija

$$\sum_{j=1}^r Q_{n_j-1}(x)w_j(x),$$

gde je Q_{n_j-1} polinom stepena ne većeg od $n_j - 1$, ima najviše $|\vec{n}| - 1$ nula u E .

Za navedene sisteme važe sledeće teoreme [37]:

TEOREMA 4.1. *Za Angelesco sistem višestruko ortogonalni polinom tipa II $P_{\vec{n}}(x)$ može se predstaviti kao proizvod r polinoma, $P_{\vec{n}}(x) = \prod_{j=1}^r q_{n_j}(x)$, gde svaki polinom q_{n_j} ima tačno n_j nula na E_j .*

DOKAZ: Pretpostavimo da $P_{\vec{n}}(x)$ ima $m_j < n_j$ promena znaka na E_j u tačkama $x_1, \dots, x_{m_j}$. Neka je

$$Q_{m_j}(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_{m_j}).$$

Tada $P_{\vec{n}}(x)Q_{m_j}(x)$ ne menja znak na E_j , pa je

$$\int_{E_j} P_{\vec{n}}(x)Q_{m_j}(x)w_j(x)dx \neq 0.$$

Međutim, to je u kontradikciji sa uslovom ortogonalnosti na E_j . Prema tome $P_{\vec{n}}(x)$ ima najmanje n_j nula na E_j . Obzirom da su svi intervali E_j ($j = 1, 2, \dots, r$) disjunktni, to $P_{\vec{n}}(x)$ ima najmanje $|\vec{n}|$ nula na realnoj pravoj. Kako je stepen polinoma $P_{\vec{n}}(x)$ jednak $|\vec{n}|$, to on ima tačno n_j nula na E_j . ■

TEOREMA 4.2. *Za AT sistem višestruko ortogonalni polinom tipa II $P_{\vec{n}}(x)$ ima tačno $|\vec{n}|$ nula na E .*

DOKAZ: Pretpostavimo da polinom $P_{\vec{n}}(x)$ ima $m < |\vec{n}|$ promena znaka na E u tačkama $x_1, \dots, x_m$. Neka je $\vec{m} = (m_1, m_2, \dots, m_r)$ multi-indeks takav da je $m_i \leq n_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) i $m_j < n_j$ za neko j , $m = |\vec{m}|$. Konstruišimo funkciju

$$Q(x) = \sum_{i=1}^r Q_i(x)w_i(x),$$

gde je Q_i polinom stepena $m_i - 1$ za sve $i \neq j$, a Q_j polinom stepena m_j , tako da ona zadovoljava interpolacione uslove

$$Q(x_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

i $Q(x_0) = 1$ za neku dodatnu tačku $x_0 \in E$. Pošto radimo sa Chebyshev-ljevim sistemom ovaj interpolacioni problem ima jedinstveno rešenje, a kako funkcija Q već ima m nula ona ne može imati dodatnih promena znaka. Zbog $Q(x_0) = 1$ funkcija Q nije identički jednaka nuli. Očigledno $P_{\vec{n}}(x)Q(x)$ ne menja znak na E , pa je

$$\int_E P_{\vec{n}}(x)Q(x) dx \neq 0,$$

što je u kontradikciji sa uslovima ortogonalnosti (4.3)–(4.5) za višestruko ortogonalne polinome tipa II. Prema tome, polinom $P_{\vec{n}}(x)$ ima tačno $|\vec{n}|$ nula na E . ■

4.2 Numerička konstrukcija višestruko ortogonalnih polinoma tipa II

Neka težinske funkcije $w_1, w_2, \dots, w_r$ čine jedan od posmatranih sistema u poglavlju 4.1. Neka je $P_{\vec{n}}(x)$ višestruko ortogonalan polinom tipa II, $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_r)$. Koristeći ideju Borges-a [5] daćemo jedan metod za konstrukciju polinoma $P_{\vec{n}}(x)$.

Neka je (p_n^*) niz ortonormiranih polinoma u odnosu na težinsku funkciju $w_1(x)$. Tada će svaki element lineala $\mathcal{L}\{p_{n_1}^*, p_{n_1+1}^*, \dots, p_{|\vec{n}|}^*\}$ biti ortogonalan na svim polinomima stepena ne većeg od $n_1 - 1$ u odnosu na skalarni proizvod (4.6) za $k = 1$. Otuda polinom $P_{\vec{n}}(x)$ možemo predstaviti u obliku

$$(4.7) \quad P_{\vec{n}}(x) = \sum_{i=n_1}^{|\vec{n}|} \gamma_i p_i^*(x)$$

za neke realne koeficijente γ_i .

Uslovi ortogonalnosti (4.3) će biti zadovoljeni za polinom $P_{\vec{n}}(x)$ iz (4.7) za sve realne brojeve γ_i ($i = n_1, n_1 + 1, \dots, |\vec{n}|$). Da bi taj polinom bio višestruko ortogonalan polinom tipa II on mora zadovoljavati i uslove ortogonalnosti (4.4)–(4.5), tj. mora važiti

$$(4.8) \quad \langle P_{\vec{n}}, q_k \rangle_k = 0 \quad (k = 2, 3, \dots, r),$$

za sve polinome $q_k(x) \in \mathcal{P}_{n_k-1}$ ($k = 2, 3, \dots, r$). Ako za bazu prostora $\mathcal{P}_m$ uzmemo $\{p_0^*, p_1^*, \dots, p_m^*\}$ onda se uslovi ortogonalnosti (4.8) svode na

$$(4.9) \quad \langle P_{\vec{n}}, p_i^* \rangle_k = 0 \quad (k = 2, 3, \dots, r; \quad i = 0, 1, \dots, n_k - 1).$$

Iz (4.7) i (4.9), kao i osobina linearnosti skalarnog proizvoda sledi

$$(4.10) \quad \sum_{j=n_1}^{|\vec{n}|} \gamma_j \langle p_j^*, p_i^* \rangle_k = 0 \quad (k = 2, 3, \dots, r; \quad i = 0, 1, \dots, n_k - 1).$$

Pretpostavimo, bez umanjenja opštosti, da je $\gamma_{|\vec{n}|} = 1$. Tada (4.10) možemo zapisati u obliku

$$(4.11) \quad \sum_{j=n_1}^{|\vec{n}|-1} \gamma_j \langle p_j^*, p_i^* \rangle_k = -\langle p_{|\vec{n}|}^*, p_i^* \rangle_k \quad (k = 2, 3, \dots, r; \quad i = 0, 1, \dots, n_k - 1).$$

Ako uvedemo oznake

$$\mu_{i,j}^{(k)} = \langle p_i^*, p_j^* \rangle_k$$

tada iz (4.11) dobijamo sledeći sistem linearnih jednačina za nepoznate koeficijente γ_i :

$$\begin{bmatrix} \mu_{n_1,0}^{(2)} & \mu_{n_1+1,0}^{(2)} & \cdots & \mu_{|\vec{n}|-1,0}^{(2)} \\ \mu_{n_1,1}^{(2)} & \mu_{n_1+1,1}^{(2)} & \cdots & \mu_{|\vec{n}|-1,1}^{(2)} \\ \mu_{n_1,2}^{(2)} & \mu_{n_1+1,2}^{(2)} & \cdots & \mu_{|\vec{n}|-1,2}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n_1,n_2-1}^{(2)} & \mu_{n_1+1,n_2-1}^{(2)} & \cdots & \mu_{|\vec{n}|-1,n_2-1}^{(2)} \\ \mu_{n_1,0}^{(3)} & \mu_{n_1+1,0}^{(3)} & \cdots & \mu_{|\vec{n}|-1,0}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n_1,n_r-1}^{(r)} & \mu_{n_1+1,n_r-1}^{(r)} & \cdots & \mu_{|\vec{n}|-1,n_r-1}^{(r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{n_1} \\ \gamma_{n_1+1} \\ \vdots \\ \gamma_{|\vec{n}|-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mu_{|\vec{n}|,0}^{(2)} \\ \mu_{|\vec{n}|,1}^{(2)} \\ \mu_{|\vec{n}|,2}^{(2)} \\ \vdots \\ \mu_{|\vec{n}|,n_2-1}^{(2)} \\ \mu_{|\vec{n}|,0}^{(3)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \mu_{|\vec{n}|,n_r-1}^{(r)} \end{bmatrix}.$$

Radi elegantnijeg zapisa gornjeg sistema definisaćemo matrice $M_{i,j,m}^{(k)}$ sa

$$M_{i,j,m}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mu_{j,0}^{(k)} & \mu_{j+1,0}^{(k)} & \cdots & \mu_{m,0}^{(k)} \\ \mu_{j,1}^{(k)} & \mu_{j+1,1}^{(k)} & \cdots & \mu_{m,1}^{(k)} \\ \mu_{j,2}^{(k)} & \mu_{j+1,2}^{(k)} & \cdots & \mu_{m,2}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{j,i-1}^{(k)} & \mu_{j+1,i-1}^{(k)} & \cdots & \mu_{m,i-1}^{(k)} \end{bmatrix}.$$

Tada koeficijente γ_i ($i = n_1, n_1 + 1, \dots, |\vec{n}| - 1$) dobijamo iz sistema

$$(4.12) \quad \begin{bmatrix} M_{n_2,n_1,|\vec{n}|-1}^{(2)} \\ M_{n_3,n_1,|\vec{n}|-1}^{(3)} \\ \vdots \\ M_{n_r,n_1,|\vec{n}|-1}^{(r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{n_1} \\ \gamma_{n_1+1} \\ \vdots \\ \gamma_{|\vec{n}|-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} M_{n_2,|\vec{n}|,|\vec{n}|}^{(2)} \\ M_{n_3,|\vec{n}|,|\vec{n}|}^{(3)} \\ \vdots \\ M_{n_r,|\vec{n}|,|\vec{n}|}^{(r)} \end{bmatrix}.$$

Znajući γ_i ($i = n_1, n_1 + 1, \dots, |\vec{n}| - 1$) ($\gamma_{|\vec{n}|} = 1$) možemo naći nule višestruko ortogonalnog polinoma tipa II $P_{\vec{n}}(x)$ (određenog sa (4.7)) rešavajući problem sopstvenih vrednosti. Naime, poznato je da niz ortonormiranih polinoma (p_i^*) u odnosu na težinsku funkciju w_1 zadovoljava tročlanu rekurentnu relaciju oblika

$$\sqrt{\beta_{m+1}^{(1)}} p_{m+1}^*(x) = (x - \alpha_m^{(1)}) p_m^*(x) - \sqrt{\beta_m^{(1)}} p_{m-1}^*(x) \quad (m = 0, 1, \dots),$$

$$p_{-1}^*(x) = 0, \quad p_0^*(x) = \left(\mu_{0,0}^{(1)}\right)^{-1/2},$$

odnosno

$$x\mathbf{p}(x) = J^{(1)}\mathbf{p}(x) + \sqrt{\beta_{|\vec{n}|}^{(1)}} p_{|\vec{n}|}^*(x) \mathbf{e}_{|\vec{n}|},$$

gde je $J^{(1)}$ simetrična trodijagonalna matrica (Jacobi-eva matrica) sa elementima $\alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_{|\vec{n}|-1}^{(1)}$ na dijagonali i elementima $\sqrt{\beta_1^{(1)}}, \sqrt{\beta_2^{(1)}}, \dots, \sqrt{\beta_{|\vec{n}|-1}^{(1)}}$ na subdijagonali,

$$\mathbf{p}(x) = [p_0^* \ p_1^* \ \dots \ p_{|\vec{n}|-1}^*]^T \quad \text{ i } \quad \mathbf{e}_{|\vec{n}|} = [\underbrace{0 \ \dots \ 0}_{|\vec{n}|} \ 1]^T.$$

Jednakost (4.7), uz činjenicu da je $\gamma_{|\vec{n}|} = 1$, daje

$$p_{|\vec{n}|}^* = P_{\vec{n}}(x) - \sum_{i=n_1}^{|\vec{n}|-1} \gamma_i p_i^*(x).$$

Ako obeležimo

$$\boldsymbol{\gamma} = [\underbrace{0 \ \dots \ 0}_{n_1} \ \gamma_{n_1} \ \dots \ \gamma_{|\vec{n}|-1}]^T$$

tada je

$$x\mathbf{p}(x) = J^{(1)}\mathbf{p}(x) + \sqrt{\beta_{|\vec{n}|}^{(1)}} (P_{\vec{n}}(x) - \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{p}(x)) \mathbf{e}_{|\vec{n}|}.$$

Sada nije teško videti da su nule višestruko ortogonalnog polinoma tipa II $P_{\vec{n}}(x)$ upravo sopstvene vrednosti matrice

$$J^{(1)} - \sqrt{\beta_{|\vec{n}|}^{(1)}} \mathbf{e}_{|\vec{n}|} \boldsymbol{\gamma}^T,$$

koje se lako mogu naći QR algoritmom [17, 34]. Takođe, mogu se koristiti i MATLAB ili MATHEMATICA.

Opisani metod omogućava jednostavnu konstrukciju višestruko ortogonalnih polinoma tipa II, ali često pokazuje i karakteristike slabe uslovljenosti. Naime, u mnogim primerima se pokazalo da je faktor uslovljenosti matrice sistema (4.12) jako veliki.

4.3 Rekurentne relacije

Kao što ortogonalni polinomi na realnoj pravoj uvek zadovoljavaju tročlanu rekurentnu relaciju, tako postoje i rekurentne relacije reda $r+1$ za višestruko ortogonalne polinome tipa II sa skoro dijagonalnim multi-indeksom.

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Zapišaćemo ga u obliku $n = \ell r + j$, gde je $0 \leq j < r$. *Skoro dijagonalan multi-indeks* $\vec{s}(n)$, koji odgovara prirodnom broju n , je multi-indeks

$$(4.13) \quad \vec{s}(n) = (\underbrace{\ell+1, \ell+1, \dots, \ell+1}_j \text{ puta}, \underbrace{\ell, \ell, \dots, \ell}_{r-j} \text{ puta}).$$

Označimo odgovarajuće višestruko ortogonalne polinome tipa II sa

$$P_n(x) = P_{\vec{s}(n)}(x).$$

TEOREMA 4.3. *Višestruko ortogonalni polinomi tipa II sa skoro dijagonalnim multi-indeksima zadovoljavaju sledeću rekurentnu relaciju:*

$$(4.14) \quad xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \sum_{i=0}^r a_{n,r-i} P_{n-i}(x) \quad (n \geq 0)$$

sa početnim uslovima $P_0(x) = 1$ i $P_i(x) = 0$ za $i = -1, -2, \dots, -r$.

DOKAZ: Predstavićemo polinom $xP_n(x)$ kao linearnu kombinaciju polinoma $P_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots, n+1$):

$$(4.15) \quad xP_n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i(n) P_i(x),$$

sa $a_{n+1}(n) = 1$.

Pretpostavimo da je $n = \ell r + j$. Treba pokazati da je $a_{mr+k}(n) = 0$ za $m = 0, 1, \dots, \ell-2$ i $k = 0, 1, \dots, r-1$ i kada je $m = \ell-1$ takođe za $k = 0, 1, \dots, j-1$, tako da se suma iz (4.15) redukuje na $\sum_{i=n-r}^{n+1} a_i(n) P_i(x)$, koja je oblika kao u (4.14).

Dokazaćemo prethodno tvrđenje indukcijom po m [36].

Neka je $m = 0$. Treba pokazati da je $a_k(n) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, r-1$). Pomnožimo obe strane jednakosti (4.15) sa $w_1(x)$ i integralimo na intervalu E_1 . Zbog uslova ortogonalnosti (4.3) desna strana se redukuje na $a_0(n) \int_{E_1} w_1(x) dx$, a leva strana je jednaka 0 kad god je $n > r$, pa je $a_0(n) = 0$. Da bi pokazali da je $a_1(n) = 0$ pomnožimo jednakost (4.15) sa $w_2(x)$ i integralimo na intervalu E_2 . Uopšteno, za proizvoljno $k = 0, 1, \dots, r-1$, pomnožimo jednakost (4.15) sa $w_{k+1}(x)$ i integralimo na intervalu E_{k+1} . Iz uslova ortogonalnosti (4.3)–(4.5) sledi da je $a_k(n) = 0$.

Pretpostavimo sada da za $M \leq m-1$ i $k = 0, 1, \dots, r-1$ ($m \leq \ell-2$) važi $a_{Mr+k}(n) = 0$. Pokažimo da je tada $a_{mr+k}(n) = 0$ za $k = 0, 1, \dots, r-1$.

Pomnožimo obe strane jednakosti (4.15) sa $x^m w_1(x)$ i integralimo na intervalu E_1 . Zbog uslova ortogonalnosti (4.3) leva strana je jednaka 0, a desna strana se redukuje na $a_{mr}(n) \int_{E_1} x^m P_{mr}(x) w_1(x) dx$. Prethodni integral je različit od 0 (jer bi u suprotnom imali jedan uslov ortogonalnosti više što bi impliciralo $P_{mr}(x) \equiv 0$). Prema tome, $a_{mr}(n) = 0$. Slično, ako jednakost (4.15) pomnožimo sa $x^m w_{k+1}(x)$ i integralimo na intervalu E_{k+1} , iz uslova ortogonalnosti (4.3)–(4.5) dobijamo da je $a_{mr+k}(n) = 0$ za $k = 0, 1, \dots, r-1$.

Konačno, neka je $m = \ell - 1$. Ako pomnožimo jednakost (4.15) sa $x^{\ell-1} w_{k+1}(x)$ i integralimo na intervalu E_{k+1} leva strana će biti jednaka 0 samo za $k = 0, 1, \dots, j-1$, dok će desna strana biti proporcionalna sa $a_{(\ell-1)r+k}(n)$. Dakle, $a_{(\ell-1)r+k}(n) = 0$ za $k = 0, 1, \dots, j-1$, što je i trebalo pokazati. ■

Stavljajući $m = 0, 1, \dots, n-1$ u (4.14) dobijamo

$$H_n \begin{bmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_{n-1}(x) \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_{n-1}(x) \end{bmatrix} - P_n(x) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tj.

$$(4.16) \quad H_n \mathbf{P}_n(x) = x \mathbf{P}_n(x) - P_n(x) \mathbf{e}_n,$$

gde je

$$\mathbf{P}_n(x) = [P_0(x) \ P_1(x) \ \dots \ P_{n-1}(x)]^T, \quad \mathbf{e}_n = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T$$

i H_n sledeća donja (sa trakom) Hessenberg-ova matrica reda n

$$(4.17) \quad H_n = \begin{bmatrix} a_{0,r} & 1 & & & & \\ a_{1,r-1} & a_{1,r} & 1 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ a_{r,0} & \cdots & a_{r,r-1} & a_{r,r} & 1 & \\ & a_{r+1,0} & \cdots & a_{r+1,r-1} & a_{r+1,r} & 1 \\ & & \ddots & & \ddots & \ddots \\ & & & a_{n-2,0} & \cdots & a_{n-2,r-1} & a_{n-2,r} & 1 \\ & & & & a_{n-1,0} & \cdots & a_{n-1,r-1} & a_{n-1,r} \end{bmatrix}.$$

Ova vrsta matrice dobija se i u konstrukciji ortogonalnih polinoma na radijalnim zracima u kompleksnoj ravni [25].

Neka su $x_i \equiv x_i^{(n)}$ nule polinoma $P_n(x)$. Tada se rekurentna relacija (4.16) svodi na problem sopstvenih vrednosti

$$x_i \mathbf{P}_n(x_i) = H_n \mathbf{P}_n(x_i).$$

Prema tome, x_i su sopstvene vrednosti matrice H_n , a $\mathbf{P}_n(x_i)$ odgovarajući sopstveni vektori.

Prema (4.16) može se izvesti i sledeća reprezentacija višestruko ortogonalnih polinoma tipa II (slično je urađeno i u radu [25])

$$P_n(x) = \det(xI_n - H_n),$$

gde je I_n jedinična matrica reda n .

Nule polinoma $P_n(x)$, kao sopstvene vrednosti matrice H_n možemo dobiti *QR* algoritmom (EISPACK rutina COMQR [34, pp. 277–284]). Takođe mogu se koristiti i MATLAB ili MATHEMATICA.

Matrica H_n nije simetrična i ne može se na jednostavan način svesti na neku simetričnu matricu (sem za slučaj $r = 1$). Zbog toga u opštem slučaju ne postoji razlog zbog koga bi njene sopstvene vrednosti bile realne. Međutim, kako su u mnogim slučajevima te sopstvene vrednosti realne (Angelesco sistemi, AT sistemi) to ukazuje da postoji neka veza između nizova koeficijenata $a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,r}$. Takođe, pitanje je i da li svaka Hessenberg-ova matrica oblika (4.17) (kod koje su nenula elementi u traci) daje sistem višestruko ortogonalnih polinoma tipa II.

Dakle, polinom $P_n(x)$ možemo jednostavno konstruisati ako znamo koeficijente rekurentne relacije (4.14), tj. elemente matrice H_n . Samo za najjednostavniji slučaj višestruke ortogonalnosti, tj. za $r = 2$, za neke klasične težinske funkcije (Jacobi-eve, Laguerre-ove, Hermite-ove) u radovima [37], [3], [35] dati su eksplicitno koeficijenti rekurentne relacije (4.14).

Mi ćemo u poglavlju 4.4 dati jedan opšti postupak za numeričko računanje koeficijenata rekurentne relacije (4.14) korišćenjem tzv. diskretizovane Stieltjes-Gautschi-eve procedure.

4.4 Numerička konstrukcija višestruko ortogonalnih polinoma tipa II sa skoro dijagonalnim multi-indeksima

U ovom poglavlju prikazaćemo jedan efikasan numerički metod za konstrukciju Hessenberg-ove matrice H_n date sa (4.17) [29]. Koristićemo jednu vrstu Stieltjes-ove procedure, date u [11], koju ćemo nazvati *diskretizovana Stieltjes-Gautschi-eve procedura*. Ona se sastoji u tome da najpre elemente matrice H_n prikažemo

u terminima skalarnih proizvoda ¹ (4.6), a zatim koristimo odgovarajuće Gauss-ove formule da diskretizujemo te skalarne proizvode. Naravno, pretpostavljamo da višestruko ortogonalni polinomi tipa II postoje u odnosu na skalarne proizvode $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$, $k = 1, 2, \dots, r$, date sa (4.6).

Razmotrićemo najpre detaljno najjednostavniji slučaj $r = 2$. U ovom slučaju imamo multi-indekse $\vec{s}(n) = (n_1(n), n_2(n))$ gde je $n_1(n) = [(n+1)/2]$ i $n_2(n) = [n/2]$, ($[t]$ – ceo deo od t), $n_1(n) + n_2(n) = n$. Odgovarajuća Hessenberg-ova matrica H_n je

$$H_n = \begin{bmatrix} a_{02} & 1 & & & & \\ a_{11} & a_{12} & 1 & & & \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & 1 & & \\ & a_{30} & a_{31} & a_{32} & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & a_{n-1,2} \end{bmatrix},$$

tako da su rekurentne relacije za višestruko ortogonalne polinome tipa II

$$(4.18) \quad \begin{cases} P_1(x) = xP_0(x) - a_{02}P_0(x), \\ P_2(x) = xP_1(x) - a_{11}P_0(x) - a_{12}P_1(x), \\ P_3(x) = xP_2(x) - a_{20}P_0(x) - a_{21}P_1(x) - a_{22}P_2(x), \\ P_4(x) = xP_3(x) - a_{30}P_1(x) - a_{31}P_2(x) - a_{32}P_3(x), \\ \vdots \end{cases}$$

tj.

$$(4.19) \quad P_{n+1}(x) = (x - a_{n,2})P_n(x) - a_{n,1}P_{n-1}(x) - a_{n,0}P_{n-2}(x) \quad (n \geq 0),$$

sa početnim uslovima $P_0(x) = 1$, $P_{-1}(x) = P_{-2}(x) = 0$.

Da bismo odredili koeficijente rekurentne relacije koristićemo (4.18), tj. (4.19) i uslove ortogonalnosti

$$\langle P_n, P_i \rangle_1 = 0 \quad \text{za} \quad i \leq \left[\frac{n-1}{2} \right] \quad \text{i} \quad \langle P_n, P_i \rangle_2 = 0 \quad \text{za} \quad i \leq \left[\frac{n-2}{2} \right].$$

Kako je $\langle P_1, P_0 \rangle_1 = 0$, iz prve jednakosti u (4.18) dobijamo

$$(4.20) \quad a_{02} = \frac{\langle xP_0, P_0 \rangle_1}{\langle P_0, P_0 \rangle_1}.$$

¹Takve formule za koeficijente tročlane rekurentne relacije za obične ortogonalne polinome na realnoj pravoj poznate su kao Darboux-ove formule.

U sledećem koraku koristimo drugu jednakost u (4.18), kao i činjenice da je $\langle P_2, P_0 \rangle_1 = 0$ i $\langle P_2, P_0 \rangle_2 = 0$. Tako iz

$$\langle P_2, P_0 \rangle_1 = \langle xP_1, P_0 \rangle_1 - a_{11} \langle P_0, P_0 \rangle_1 - a_{12} \langle P_1, P_0 \rangle_1,$$

zbog $\langle P_1, P_0 \rangle_1 = 0$, dobijamo

$$(4.21) \quad a_{11} = \frac{\langle xP_1, P_0 \rangle_1}{\langle P_0, P_0 \rangle_1}.$$

Slično, iz $\langle P_2, P_0 \rangle_2 = \langle xP_1 - a_{11}P_0, P_0 \rangle_2 - a_{12} \langle P_1, P_0 \rangle_2$ dobijamo

$$(4.22) \quad a_{12} = \frac{\langle xP_1 - a_{11}P_0, P_0 \rangle_2}{\langle P_1, P_0 \rangle_2}.$$

Obzirom da je $\langle P_3, P_0 \rangle_1 = 0$, $\langle P_3, P_0 \rangle_2 = 0$ i $\langle P_3, P_1 \rangle_1 = 0$, koristeći treću jednakost u (4.18), dobijamo sukcesivno

$$(4.23) \quad a_{20} = \frac{\langle xP_2, P_0 \rangle_1}{\langle P_0, P_0 \rangle_1} \quad (\text{zbog } \langle P_1, P_0 \rangle_1 = 0, \langle P_2, P_0 \rangle_1 = 0),$$

$$(4.24) \quad a_{21} = \frac{\langle xP_2 - a_{20}P_0, P_0 \rangle_2}{\langle P_1, P_0 \rangle_2} \quad (\text{zbog } \langle P_2, P_0 \rangle_2 = 0),$$

$$(4.25) \quad a_{22} = \frac{\langle xP_2 - a_{20}P_0 - a_{21}P_1, P_1 \rangle_1}{\langle P_2, P_1 \rangle_1}.$$

Slično, četvrta jednakost u (4.18) i uslovi ortogonalnosti

$$\langle P_4, P_0 \rangle_1 = 0, \quad \langle P_4, P_0 \rangle_2 = 0, \quad \langle P_4, P_1 \rangle_1 = 0 \quad \text{i} \quad \langle P_4, P_1 \rangle_2 = 0$$

daju

$$(4.26) \quad a_{30} = \frac{\langle xP_3, P_0 \rangle_2}{\langle P_1, P_0 \rangle_2} \quad (\text{zbog } \langle P_2, P_0 \rangle_2 = 0, \langle P_3, P_0 \rangle_2 = 0),$$

$$(4.27) \quad a_{31} = \frac{\langle xP_3 - a_{30}P_1, P_1 \rangle_1}{\langle P_2, P_1 \rangle_1} \quad (\text{zbog } \langle P_3, P_1 \rangle_1 = 0),$$

$$(4.28) \quad a_{32} = \frac{\langle xP_3 - a_{30}P_1 - a_{31}P_2, P_1 \rangle_2}{\langle P_3, P_1 \rangle_2}.$$

Nastavljajući ovu proceduru dalje možemo pokazati sledeći rezultat:

TEOREMA 4.4. Neka je $n = 2\ell + \nu$, gde je $\ell = [n/2]$ i $\nu \in \{0, 1\}$. Koeficijenti rekurentne relacije (4.19) mogu se predstaviti u obliku

$$(4.29) \quad a_{n,0} = \frac{\langle xP_n, P_{[(n-2)/2]} \rangle_{\nu+1}}{\langle P_{n-2}, P_{[(n-2)/2]} \rangle_{\nu+1}},$$

$$(4.30) \quad a_{n,1} = \frac{\langle xP_n - a_{n,0}P_{n-2}, P_{[(n-1)/2]} \rangle_{\nu}}{\langle P_{n-1}, P_{[(n-1)/2]} \rangle_{\nu}},$$

$$(4.31) \quad a_{n,2} = \frac{\langle xP_n - a_{n,0}P_{n-2} - a_{n,1}P_{n-1}, P_{[n/2]} \rangle_{\nu-1}}{\langle P_n, P_{[n/2]} \rangle_{\nu-1}},$$

gde je $\langle \cdot, \cdot \rangle_{j+2m} = \langle \cdot, \cdot \rangle_j$ ($j = 1, 2$) za svako $m \in \mathbb{Z}$.

DOKAZ: Formule (4.29)–(4.31) su dokazane prethodno za $n \leq 3$. Za proizvoljno n polazimo od rekurentne relacije (4.19) i uzimamo skalarne proizvode $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$ u odnosu na težinske funkcije w_j ($j = 1, 2$).

Neka je $n = 2\ell + \nu$, pri čemu je $\ell = [n/2]$ i $\nu \in \{0, 1\}$. Uslovi ortogonalnosti, u ovom slučaju, su

$$\langle P_n, P_i \rangle_1 = 0 \quad \left(i \leq \left[\frac{n-1}{2} \right] \right) \quad \text{i} \quad \langle P_n, P_i \rangle_2 = 0 \quad \left(i \leq \left[\frac{n-2}{2} \right] \right).$$

Iz

$$(4.32) \quad \langle P_{n+1}, P_i \rangle_j = \langle xP_n - a_{n,0}P_{n-2} - a_{n,1}P_{n-1} - a_{n,2}P_n, P_i \rangle_j,$$

tj.

$$\langle P_{n+1}, P_i \rangle_j = \langle xP_n, P_i \rangle_j - a_{n,0} \langle P_{n-2}, P_i \rangle_j - a_{n,1} \langle P_{n-1}, P_i \rangle_j - a_{n,2} \langle P_n, P_i \rangle_j,$$

za $i = [(n-2)/2]$ i $j = \nu+1$ zaključujemo da (4.29) važi, zbog $\langle P_m, P_{[(n-2)/2]} \rangle_{\nu+1} = 0$ for $m = n-1, n, n+1$.

Dalje, za $i = [(n-1)/2]$ i $j = \nu$, ista jednakost se svodi na

$$\begin{aligned} \langle P_{n+1}, P_{[(n-1)/2]} \rangle_{\nu} &= \langle xP_n - a_{n,0}P_{n-2}, P_{[(n-1)/2]} \rangle_{\nu} - a_{n,1} \langle P_{n-1}, P_{[(n-1)/2]} \rangle_{\nu} \\ &\quad - a_{n,2} \langle P_n, P_{[(n-1)/2]} \rangle_{\nu}, \end{aligned}$$

odakle, zbog $\langle P_m, P_{[(n-1)/2]} \rangle_{\nu} = 0$ za $m = n, n+1$, dobijamo (4.30).

Konačno, za $i = [n/2]$ i $j = \nu-1$, imamo $\langle P_{n+1}, P_{[n/2]} \rangle_{\nu-1} = 0$, pa iz (4.32) sledi (4.31). ■

Prethodna teorema se može proširiti na slučaj $r \in \mathbb{N}$ ($r \geq 3$) težinskih funkcija w_j ($j = 1, 2, \dots, r$). Uzimajući za skalarne proizvode $\langle \cdot, \cdot \rangle_{j+mr} = \langle \cdot, \cdot \rangle_j$ ($m \in \mathbb{Z}$), važi sledeći rezultat:

TEOREMA 4.5. Višestruko ortogonalni polinomi tipa II sa skoro dijagonalnim multi-indeksima (P_n) zadovoljavaju rekurentnu relaciju

$$(4.33) \quad P_{n+1}(x) = (x - a_{n,r})P_n(x) - \sum_{k=0}^{r-1} a_{n,k}P_{n-r+k}(x) \quad (n \geq 0),$$

gde je

$$a_{n,0} = \frac{\langle xP_n, P_{[(n-r)/r]} \rangle_{\nu+1}}{\langle P_{n-r}, P_{[(n-r)/r]} \rangle_{\nu+1}}$$

i

$$a_{n,k} = \frac{\left\langle xP_n - \sum_{i=0}^{k-1} a_{n,i}P_{n-r+i}, P_{[(n-r+k)/r]} \right\rangle_{\nu+k+1}}{\langle P_{n-r+k}, P_{[(n-r+k)/r]} \rangle_{\nu+k+1}}$$

za $k = 1, 2, \dots, r$.

Dokaz ove teoreme je analogan dokazu prethodne (za $r = 2$). Ovde uzimamo $n = \ell r + \nu$, gde je $\ell = [n/r]$ i $\nu \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ i koristimo odgovarajuće uslove ortogonalnosti.

Napomena. Koeficijenti rekurentne relacije (4.33) se mogu odrediti i na sledeći način:

Za $0 \leq k < r$

$$a_{k,r-k} = \frac{\langle xP_k, P_0 \rangle_1}{\langle P_0, P_0 \rangle_1}$$

i za $m = k-1, k-2, \dots, 0$

$$a_{k,r-m} = \frac{\left\langle xP_k - \sum_{i=r-k}^{r-m-1} a_{r,i}P_{k-r+i}, P_0 \right\rangle_{k-m+1}}{\langle P_{k-m}, P_0 \rangle_{k-m+1}}.$$

Za $n \geq r$ ($n = \ell r + \nu$, $\ell = [n/r]$ i $\nu \in \{0, 1, \dots, r-1\}$) imamo

$$a_{n,0} = \frac{\langle xP_n, P_{\ell-1} \rangle_{\nu+1}}{\langle P_{n-r}, P_{\ell-1} \rangle_{\nu+1}}$$

i za $1 \leq k \leq r$

$$a_{n,k} = \begin{cases} \frac{\left\langle xP_n - \sum_{i=0}^{k-1} a_{n,i}P_{n-r+i}, P_{\ell-1} \right\rangle_{\nu+k+1}}{\langle P_{n-r+k}, P_{\ell-1} \rangle_{\nu+k+1}}, & \nu + k + 1 \leq r, \\ \frac{\left\langle xP_n - \sum_{i=0}^{k-1} a_{n,i}P_{n-r+i}, P_{\ell} \right\rangle_{\nu+k+1-r}}{\langle P_{n-r+k}, P_{\ell} \rangle_{\nu+k+1-r}}, & \nu + k + 1 > r. \end{cases}$$

Svi potrebni skalarni proizvodi mogu se računati tačno, izuzimajući jedino greške zaokrugljivanja, korišćenjem Gauss-Christoffel-ovih kvadrature formula za odgovarajuće težinske funkcije

$$(4.34) \quad \int_{E_i} g(t)w_i(t)dt = \sum_{\nu=1}^N A_{i,\nu}^{(N)} g\left(\tau_{i,\nu}^{(N)}\right) + R_{i,N}(g) \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Dakle, za sva računanja koristimo jedino rekurentnu relaciju (4.14) za višestruko ortogonalne polinome tipa II sa skoro dijagonalnim multi-indeksom i Gauss-Christoffel-ove kvadrature formule (4.34).

Nule višestruko ortogonalnog polinoma tipa II $P_n(x)$ se sada mogu lako izračunati kao sopstvene vrednosti Hessenberg-ove matrice (4.17), kao što je opisano u prethodnom poglavlju. Problem slabe uslovljenosti algoritma opisanog u poglavlju 4.2 se ovde ne javlja.

4.5 Odgovarajuće kvadrature formule Gauss-ovog tipa

Polazeći od problema koji se javljaju u kompjuterskoj grafici, Borges [5] je razmatrao problem numeričkog računanja skupa od r određenih integrala u odnosu na različite težinske funkcije, ali sa istim integrandom i intervalom integracije.

Korišćenje skupa od r Gauss-Christoffel-ovih kvadrature formula nije optimalno jer zahteva veliki broj izračunavanja vrednosti integranda u odnosu na postignuti stepen tačnosti.

Borges je posmatrao tzv. "količnik performanse" (*eng. performance ratio*) definisan sa:

$$R = \frac{\text{Ukupan stepen tačnosti} + 1}{\text{Broj izračunavanja vrednosti integranda}}.$$

Ako koristimo skup od r Gauss-Christoffel-ovih kvadrature formula tada je

$$R = \frac{2n - 1 + 1}{rn} = \frac{2}{r},$$

pa je $R < 1$ za sve $r > 2$.

Ako izaberemo skup od n različitih čvorova $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, zajedničkih za svih r kvadrature formula, tada se za svako $m = 1, 2, \dots, r$ težinski koeficijenti $A_{m,i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) kvadrature formule

$$\hat{Q}_m f = \sum_{i=1}^n A_{m,i} f(x_i)$$

mogu izabrati tako da zadovoljavaju sledeći Vandermonde-ov sistem

$$(4.35) \quad V(x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{bmatrix} A_{m,1} \\ A_{m,2} \\ \vdots \\ A_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0^{(m)} \\ \mu_1^{(m)} \\ \vdots \\ \mu_{n-1}^{(m)} \end{bmatrix} \quad (m = 1, 2, \dots, r),$$

gde je

$$\mu_i^{(m)} = \int_E x^i w_m(x) dx \quad (m = 1, 2, \dots, r; \quad i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Tada je

$$R = \frac{n-1+1}{n} = 1.$$

Kako su čvorovi izabrani proizvoljno, to dobijene kvadrature formule neće biti "najbolje moguće".

Cilj je naći optimalan skup čvorova, simulirajući razvoj Gauss-Christoffel-ovih kvadrature formula.

Označimo sa $W = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$ AT sistem težinskih funkcija.

Uvešćemo sledeću definiciju (analogno [5, Definicija 3.]):

DEFINICIJA 4.1. *Neka je W AT sistem (težinske funkcije w_i ($i = 1, 2, \dots, r$) sve imaju nosač u intervalu E), neka je $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_r)$ multi-indeks i $n = |\vec{n}|$. Skup kvadrature formula oblika:*

$$(4.36) \quad \int_E f(x) w_m(x) dx \approx \sum_{i=1}^n A_{m,i} f(x_i) \quad (m = 1, 2, \dots, r)$$

ćemo zvati optimalan skup u odnosu na $(W, \vec{n})$ ako i samo ako težinski koeficijenti $A_{m,i}$ i čvorovi x_i zadovoljavaju sledeće uslove:

$$(4.37) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^n A_{m,i} &= \int_E w_m(x) dx \\ \sum_{i=1}^n A_{m,i} x_i &= \int_E x w_m(x) dx \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^n A_{m,i} x_i^{n+n_m-1} &= \int_E x^{n+n_m-1} w_m(x) dx \end{aligned}$$

za svako $m = 1, 2, \dots, r$.

Sada možemo dokazati uopštenje fundamentalne teoreme za Gauss-Christoffel-ove kvadrature formule.

TEOREMA 4.6. Neka je W AT sistem, $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_r)$, $n = |\vec{n}|$. Posmatrajmo kvadraturene formule

$$(4.38) \quad \int_E f(x) w_m(x) dx \approx \sum_{i=1}^n A_{m,i} f(x_i) \quad (m = 1, 2, \dots, r).$$

Ove formule čine optimalan skup u odnosu na $(W, \vec{n})$ ako i samo ako važi:

1. Tačne su za sve polinome stepena $\leq n - 1$.
2. Polinom $q(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$ je višestruko ortogonalan polinom tipa II $P_{\vec{n}}(x)$ u odnosu na W .

DOKAZ: Pretpostavimo prvo da kvadraturene formule (4.38) čine optimalan skup u odnosu na $(W, \vec{n})$.

Za tvrđenje 1 primetimo da za je svako m odgovarajuća kvadratura formula (4.38) tačna za sve polinome stepena $\leq n + n_m - 1$, pa samim tim i za sve polinome stepena $\leq n - 1$.

Pokažimo da važi tvrđenje 2. Za svako $m = 1, 2, \dots, r$ pretpostavimo da je $p_m(x)$ polinom stepena $\leq n_m - 1$. Onda je polinom $q(x)p_m(x)$ stepena $\leq n + n_m - 1$. Pošto je odgovarajuća kvadratura formula tačna za sve takve polinome sledi da je

$$(4.39) \quad \int_E q(x)p_m(x) w_m(x) dx = \sum_{i=1}^n A_{m,i} q(x_i) p_m(x_i).$$

Kako je $q(x_i) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) suma sa desne strane jednakosti (4.39) je identički jednaka 0, pa je

$$\int_E q(x)p_m(x) w_m(x) dx = 0 \quad (m = 0, 1, \dots, r),$$

odakle sledi tvrđenje 2.

Pretpostavimo sada da za kvadraturene formule (4.38) tvrđenja 1 i 2 važe. Za svako $m = 1, 2, \dots, r$ neka je $p_m(x)$ polinom stepena $\leq n + n_m - 1$. Polinom $p_m(x)$ možemo zapisati u obliku $p_m(x) = q(x)s_m(x) + r(x)$, gde je $s_m(x)$ polinom stepena $\leq n_m - 1$ i $r(x)$ stepena $\leq n - 1$. Tada je

$$\begin{aligned} \int_E p_m(x) w_m(x) dx &= \int_E [q(x)s_m(x) + r(x)] w_m(x) dx \\ &= \int_E q(x)s_m(x) w_m(x) dx + \int_E r(x) w_m(x) dx. \end{aligned}$$

Iz tvrđenja 2 je $\int_E q(x)s_m(x) w_m(x) dx = 0$, pa je

$$\int_E p_m(x) w_m(x) dx = \int_E r(x) w_m(x) dx.$$

Pošto je $r(x)$ polinom stepena $\leq n - 1$ iz tvrđenja 1 sledi

$$\int_E r(x) w_m(x) dx = \sum_{i=1}^n A_{m,i} r(x_i),$$

odnosno

$$\int_E p_m(x) w_m(x) dx = \sum_{i=1}^n A_{m,i} r(x_i).$$

Kako je $q(x_i) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) to je

$$\begin{aligned} \int_E p_m(x) w_m(x) dx &= \sum_{i=1}^n A_{m,i} [q(x_i) s_m(x_i) + r(x_i)] \\ &= \sum_{i=1}^n A_{m,i} p_m(x_i), \end{aligned}$$

tj. kvadratura formula je tačna za sve polinome stepena $\leq n + n_m - 1$. ■

Specijalno, za $r = 1$ u definiciji 4.1. dobija se Gauss-Christoffel-ova kvadratura formula.

Prema teoremi 4.6. čvorovi optimalnog skupa kvadrature formula (kvadrature formula Gauss-ovog tipa) u odnosu na $(W, \vec{n})$ su nule višestruko ortogonalnog polinoma tipa II $P_{\vec{n}}(x)$ za dati AT sistem W . Kada nađemo čvorove, onda težinske koeficijente $A_{m,i}$ ($m = 1, 2, \dots, r$; $i = 1, 2, \dots, n$) možemo dobiti rešavanjem Vandermonde-ovih sistema (4.35). Svaki takav Vandermonde-ov sistem ima jedinstveno rešenje jer su sve nule višestruko ortogonalnog polinoma tipa II $P_{\vec{n}}(x)$ međusobno različite (teorema 4.2.).

U slučaju kada je multi-indeks skoro dijagonalan čvorove x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) kvadrature formula Gauss-ovog tipa možemo dobiti kao sopstvene vrednosti odgovarajuće Hessenberg-ove matrice (4.17). Iz (4.16) sledi da je sopstveni vektor koji odgovara sopstvenoj vrednosti x_i dat sa $\mathbf{P}_n(x_i)$, gde je

$$\mathbf{P}_n(x) = [P_0(x) \ P_1(x) \ \dots \ P_{n-1}(x)]^T.$$

Iskoristićemo tu činjenicu da izračunamo težinske koeficijente $A_{m,i}$ zahtevajući da svaka od r kvadrature formula generiše tačno prvih n modifikovanih momenata [29].

Označimo sa $V_n = [\mathbf{P}_n(x_1) \ \mathbf{P}_n(x_2) \ \dots \ \mathbf{P}_n(x_n)]$ matricu sopstvenih vektora Hessenberg-ove matrice (4.17), normalizovanih tako da su im prve komponente jednake 1. Tada težinske koeficijente $A_{m,i}$ možemo dobiti rešavanjem r sistema linearnih jednačina:

$$(4.40) \quad V_n \cdot \begin{bmatrix} A_{m,1} \\ A_{m,2} \\ \vdots \\ A_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0^{*(m)} \\ \mu_1^{*(m)} \\ \vdots \\ \mu_{n-1}^{*(m)} \end{bmatrix} \quad (m = 1, 2, \dots, r),$$

gde su

$$\mu_i^{*(m)} = \int_E P_i(x) w_m(x) dx \quad (m = 1, 2, \dots, r; \quad i = 0, 1, \dots, n-1)$$

modifikovani momenti i $P_i(x) = P_{\tilde{s}(i)}(x)$ višestruko ortogonalni polinomi tipa II.

Svi modifikovani momenti se mogu izračunati tačno, izuzimajući greške zaokruživanja, korišćenjem Gauss-Christoffel-ovih quadraturnih formula za odgovarajuće težinske funkcije w_m ($m = 1, 2, \dots, r$).

4.6 Numerički primeri

U ovom poglavlju ćemo dati primere nekih višestruko ortogonalnih polinoma tipa II za neke klasične težinske funkcije. Sva numerička izračunavanja su vršena primenom algoritma opisanog u poglavlju 4.4 za višestruko ortogonalne polinome i u poglavlju 4.5 za odgovarajuće kvadrature formule Gauss-ovog tipa.

4.6.1 Višestruko ortogonalni Jacobi-evi polinomi

Kao prvi primer višestruko ortogonalnih polinoma tipa II uzećemo višestruko ortogonalne Jacobi-evi polinome. To su višestruko ortogonalni polinomi tipa II u odnosu na AT sistem koji se sastoji od Jacobi-evih težinskih funkcija na intervalu $[-1, 1]$ sa različitim singularitetima u -1 i istim singularitetima u 1 .

Dakle, težinske funkcije su

$$(4.41) \quad w_m(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^{\beta_m} \quad (m = 1, 2, \dots, r),$$

gde su $\alpha, \beta_m > -1$ ($m = 1, 2, \dots, r$) i $\beta_i - \beta_j \notin \mathbb{Z}$ kadgod je $i \neq j$ da bi imali AT sistem.

Ove polinome je prvi izučavao Piñeiro za specijalan slučaj $\alpha = 0$. Često u literaturi se višestruko ortogonalni Jacobi-evi polinomi nazivaju i Jacobi-Piñeiro-vi polinomi.

U tabeli 4.1 dati su koeficijenti rekurentne relacije za jedan primer višestruko ortogonalnih Jacobi-evih polinoma.

U tabelama 4.2, 4.3 i 4.4 dati su čvorovi i težinski koeficijenti za kvadrature formule Gauss-ovog tipa u odnosu na AT sistem koji se sastoji od Jacobi-evih težinskih funkcija (4.41) sa skoro dijagonalnim multi-indeksima.

Brojevi u zagradama u svim tabelama predstavljaju decimalni eksponent.

4.6.2 Višestruko ortogonalni Laguerre-ovi polinomi

Višestruko ortogonalni Laguerre-ovi polinomi su višestruko ortogonalni polinomi tipa II u odnosu na AT sistem koji se sastoji od r generalisanih Laguerre-ovih težinskih funkcija na $[0, \infty)$ sa različitim singularitetima u 0.

Prema tome, težinske funkcije su:

$$(4.42) \quad w_m(x) = x^{s_m} e^{-x} \quad (m = 1, 2, \dots, r),$$

gde su $s_m > -1$ ($m = 1, 2, \dots, r$) uz uslov $s_i - s_j \notin \mathbb{Z}$ kadgod je $i \neq j$ da bi imali AT sistem.

U tabeli 4.5 dati su čvorovi i težinski koeficijenti za kvadrature formule Gauss-ovog tipa u odnosu na AT sistem koji se sastoji od Laguerre-ovih težinskih funkcija (4.42) sa skoro dijagonalnim multi-indeksima.

Tabela 4.1: Koeficijenti $a_{n,k}$ ($k = 0, 1, \dots, r$) za višestruko ortogonalne Jacobi-eve polinome; $r = 3$, $\alpha = 1$, $\beta_1 = 1/2$, $\beta_2 = 1/4$, $\beta_3 = -1/4$; $n \leq 20$

i	$\alpha_{i,3}$	$\alpha_{i,2}$	$\alpha_{i,1}$	$\alpha_{i,0}$
0	-1.4285714285714286(-1)			
1	-2.8851540616246499(-1)	2.1768707482993197(-1)		
2	-3.8544221516357739(-1)	2.4885533536052567(-1)	5.4324760207113148(-2)	
3	-9.4489583642901721(-2)	2.5558194822003397(-1)	8.6774057165275854(-2)	1.6315423013987607(-2)
4	-1.6673090667975578(-1)	2.5701587367507144(-1)	1.6443964001352355(-2)	2.6675531012774156(-3)
5	-2.3917669428505342(-1)	2.6044916232539520(-1)	3.7021425677769084(-2)	9.3611909096357025(-5)
6	-1.1675493268393866(-1)	2.6354196522803514(-1)	5.6926131661188442(-2)	5.3653620722313774(-3)
7	-1.5805969659825489(-1)	2.6335336044273302(-1)	2.5309273618079248(-2)	2.2709691393999234(-3)
8	-2.0585232191457832(-1)	2.6413791455531671(-1)	3.6650017572954548(-2)	5.6560604717520359(-4)
9	-1.2741821376445422(-1)	2.6533854996293367(-1)	4.9582124305304638(-2)	3.8361194660048999(-3)
10	-1.5612993377662020(-1)	2.6512203005415770(-1)	2.8981366184597451(-2)	2.1639728364239452(-3)
11	-1.9145697954087840(-1)	2.6540589436380828(-1)	3.6765551681749009(-2)	8.8783317461228555(-4)
12	-1.3357792695166176(-1)	2.6601855379084442(-1)	4.6270196508266970(-2)	3.2511017686051238(-3)
13	-1.5553744375047290(-1)	2.6585132520725863(-1)	3.0966883005005431(-2)	2.1143133877612638(-3)
14	-1.8348871061253406(-1)	2.6598104740033892(-1)	3.6886585572864122(-2)	1.0966845714025530(-3)
15	-1.3757717226728043(-1)	2.6634705046296363(-1)	4.4386333038230584(-2)	2.9447307424077395(-3)
16	-1.5534192543920438(-1)	2.6622059700938253(-1)	3.2207381758124402(-2)	2.0856866464893746(-3)
17	-1.7844389078361894(-1)	2.6628881061328641(-1)	3.6981744226277791(-2)	1.2402019680140608(-3)
18	-1.4038002152177360(-1)	2.6653039931011929(-1)	4.3171017016114228(-2)	2.7567838441883074(-3)
19	-1.5529015667141288(-1)	2.6643295689567229(-1)	3.3055076847041242(-2)	2.0670810214041445(-3)
20	-1.7496809628326628(-1)	2.6647232016548233(-1)	3.7055003346066915(-2)	1.3442305416000771(-3)

Tabela 4.2: Parametri kvadraturnih formula Gauss-ovog tipa; $r = 2$, $\alpha = -1/4$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = -1/2$

n	i	x_i	$A_{1,i}$	$A_{2,i}$
4	1	-9.363803514553(-1)	1.510869112286(-2)	8.507039212840(-1)
	2	-4.582349100977(-1)	3.288800922900(-1)	8.271187908480(-1)
	3	2.858146299038(-1)	1.040155878374	7.131276432992(-1)
	4	8.759963988450(-1)	1.178587270415	4.587234284060(-1)
5	1	-9.595739732964(-1)	6.085528646610(-3)	6.792157651536(-1)
	2	-6.429557235013(-1)	1.448828264237(-1)	6.808231614855(-1)
	3	-8.563321535083(-2)	5.546715987146(-1)	6.341969901657(-1)
	4	5.139342213734(-1)	9.766942509866(-1)	5.243590871209(-1)
	5	9.193715479180(-1)	8.803977274303(-1)	3.310787799115(-1)
6	1	-9.763650757517(-1)	2.049797491247(-3)	5.231693814831(-1)
	2	-7.779228623312(-1)	5.835107309355(-2)	5.582115897381(-1)
	3	-3.801432801669(-1)	2.731946113853(-1)	5.597593346685(-1)
	4	1.361177426328(-1)	6.241401620412(-1)	5.154089057680(-1)
	5	6.258082404992(-1)	8.808613543314(-1)	4.249153713749(-1)
	6	9.389388015514(-1)	7.241349338591(-1)	2.682092008046(-1)
8	1	-9.886995595675(-1)	4.657060697402(-4)	3.636423493026(-1)
	2	-8.890000823095(-1)	1.495796500577(-2)	4.047480255191(-1)
	3	-6.692705951078(-1)	8.133867893733(-2)	4.276372272958(-1)
	4	-3.397509595584(-1)	2.282259252626(-1)	4.254067482829(-1)
	5	5.519134932225(-2)	4.353613810197(-1)	4.016547542013(-1)
	6	4.498518834434(-1)	6.235260087583(-1)	3.571652132341(-1)
	7	7.729307134229(-1)	6.817427718958(-1)	2.887904888088(-1)
	8	9.638670760628(-1)	4.971134952526(-1)	1.806289771926(-1)
16	1	-9.982593521223(-1)	1.098552045505(-5)	1.441066772881(-1)
	2	-9.817291574247(-1)	4.226450510599(-4)	1.711788751056(-1)
	3	-9.407756176104(-1)	2.780997620514(-3)	1.929514233662(-1)
	4	-8.695291944228(-1)	9.759829836089(-3)	2.070962723425(-1)
	5	-7.655502123735(-1)	2.448418898469(-2)	2.156805365210(-1)
	6	-6.294503342599(-1)	4.960732841303(-2)	2.199258100412(-1)
	7	-4.645800212282(-1)	8.640162903920(-2)	2.205362939405(-1)
	8	-2.766686612890(-1)	1.340638010684(-1)	2.179242732461(-1)
	9	-7.338464711499(-2)	1.893823545890(-1)	2.123196914279(-1)
	10	1.361863364297(-1)	2.468423207685(-1)	2.038192868004(-1)
	11	3.421285501631(-1)	2.991521205656(-1)	1.923981595665(-1)
	12	5.343218013065(-1)	3.380778041836(-1)	1.778860841360(-1)
	13	7.030721540670(-1)	3.553567251522(-1)	1.598876674383(-1)
	14	8.397122251226(-1)	3.432706621804(-1)	1.375662333964(-1)
	15	9.371372223537(-1)	2.937586824518(-1)	1.089557444265(-1)
	16	9.902623590388(-1)	1.893598567773(-1)	6.744075479414(-2)

Tabela 4.3: Parametri kvadraturnih formula Gauss-ovog tipa; $r = 2$, $\alpha = 1$, $\beta_1 = 1/2$, $\beta_2 = 1/4$

n	i	x_i	$A_{1,i}$	$A_{2,i}$
8	1	-9.807736962906(-1)	1.325904689018(-2)	3.587388796878(-2)
	2	-8.876182343170(-1)	8.993704645232(-2)	1.553022696100(-1)
	3	-6.936308793740(-1)	2.295086020893(-1)	3.084910553923(-1)
	4	-4.044677498567(-1)	3.557671050559(-1)	4.049850264214(-1)
	5	-5.085190374679(-2)	3.796403494806(-1)	3.846262824921(-1)
	6	3.192334275974(-1)	2.814356509000(-1)	2.626023899340(-1)
	7	6.503798123970(-1)	1.318293702509(-1)	1.163097742511(-1)
	8	8.904965191882(-1)	2.711729541200(-2)	2.312609971188(-2)
16	1	-9.967548537764(-1)	9.571585241732(-4)	4.031747449071(-3)
	2	-9.795318390040(-1)	7.766425149231(-3)	2.053152048929(-2)
	3	-9.396786824126(-1)	2.531111328266(-2)	5.107333208301(-2)
	4	-8.720737165847(-1)	5.520108488960(-2)	9.230126343675(-2)
	5	-7.745128722855(-1)	9.488967509297(-2)	1.377014527333(-1)
	6	-6.473891617926(-1)	1.381068532201(-1)	1.792219984018(-1)
	7	-4.934188362486(-1)	1.764094860064(-1)	2.091027166881(-1)
	8	-3.173466546442(-1)	2.014702594072(-1)	2.216465061887(-1)
	9	-1.255985677984(-1)	2.074591770035(-1)	2.145383497353(-1)
	10	7.412472926200(-2)	1.927938882876(-1)	1.893780251966(-1)
	11	2.733053271928(-1)	1.606915590066(-1)	1.512724794181(-1)
	12	4.630996337573(-1)	1.183079493369(-1)	1.075710607730(-1)
	13	6.348413954801(-1)	7.468921452913(-2)	6.605245832617(-2)
	14	7.805309103214(-1)	3.814550835763(-2)	3.302220184458(-2)
	15	8.932842079742(-1)	1.385392337033(-2)	1.181051479537(-2)
	16	9.677130399651(-1)	2.441191067272(-3)	2.061158222603(-3)
20	1	-9.982288278661(-1)	3.889716609793(-4)	1.905456134189(-3)
	2	-9.886386626720(-1)	3.265598826328(-3)	1.000188652666(-2)
	4	-9.659739987498(-1)	1.106728185934(-2)	2.576847013301(-2)
	4	-9.266485635472(-1)	2.530651619545(-2)	4.862730454695(-2)
	5	-8.684551170402(-1)	4.611534787923(-2)	7.657323581180(-2)
	6	-7.904178223677(-1)	7.212856742355(-2)	1.066028263922(-1)
	7	-6.926855921082(-1)	1.006552949043(-1)	1.351888566766(-1)
	8	-5.764377040286(-1)	1.281177978289(-1)	1.588108395622(-1)
	9	-4.437840060752(-1)	1.506866430235(-1)	1.744873269866(-1)
	10	-2.976510800276(-1)	1.649957834108(-1)	1.802331262685(-1)
	11	-1.416511021178(-1)	1.687964514393(-1)	1.753667885305(-1)
	12	2.006639866446(-2)	1.614137925633(-1)	1.606140492565(-1)
	13	1.829773548203(-1)	1.439055859944(-1)	1.379855295136(-1)
	14	3.423564271674(-1)	1.188814661907(-1)	1.104452877589(-1)
	15	4.934555482719(-1)	9.001142762434(-2)	8.142346401480(-2)
	16	6.316819336592(-1)	6.131880499982(-2)	5.425438018451(-2)
	17	7.527694731197(-1)	3.640059955758(-2)	3.163569186502(-2)
	18	8.529374177090(-1)	1.773603342592(-2)	1.520167035575(-2)
	19	9.290303254075(-1)	6.227991495789(-3)	5.284613709794(-3)
	20	9.786309311142(-1)	1.074510227844(-3)	9.059815536125(-4)

Tabela 4.4: Parametri kvadraturnih formula Gauss-ovog tipa; $r = 3$, $\alpha = -1/2$, $\beta_1 = -1/4$, $\beta_2 = 1/4$, $\beta_3 = 1$

n	i	x_i	$A_{1,i}$	$A_{2,i}$	$A_{3,i}$
11	1	-9.966785646(-1)	3.442149651(-2)	1.951556079(-3)	2.720558716(-5)
	2	-9.662634283(-1)	8.977660019(-2)	1.648959244(-2)	1.298133852(-3)
	3	-8.814124617(-1)	1.469505021(-1)	5.060483585(-2)	1.022634133(-2)
	4	-7.270877761(-1)	2.004829910(-1)	1.047343060(-1)	3.954633319(-2)
	5	-5.028256153(-1)	2.484956734(-1)	1.752157763(-1)	1.037420359(-1)
	6	-2.221392615(-1)	2.902311734(-1)	2.559734862(-1)	2.120173353(-1)
	7	8.985875974(-2)	3.253336240(-1)	3.396362684(-1)	3.622778028(-1)
	8	4.003588018(-1)	3.536032653(-1)	4.184426362(-1)	5.386608643(-1)
	9	6.738410761(-1)	3.749099341(-1)	4.850472636(-1)	7.137887927(-1)
	10	8.774690236(-1)	3.891634987(-1)	5.332348057(-1)	8.552598300(-1)
	11	9.860923411(-1)	3.963050252(-1)	5.585078705(-1)	9.343914914(-1)
12	1	-9.974811524(-1)	2.810008759(-2)	1.388617673(-3)	1.572046874(-5)
	2	-9.739859787(-1)	7.443901179(-2)	1.200592842(-2)	7.777376381(-4)
	3	-9.071961425(-1)	1.232067053(-1)	3.753345287(-2)	6.310914631(-3)
	4	-7.832459896(-1)	1.696209126(-1)	7.897014315(-2)	2.508639684(-2)
	5	-5.987263856(-1)	2.119646565(-1)	1.342714734(-1)	6.769618715(-2)
	6	-3.605735941(-1)	2.495388662(-1)	1.995416142(-1)	1.426843714(-1)
	7	-8.483874835(-2)	2.820263912(-1)	2.697978982(-1)	2.524420974(-1)
	8	2.055087375(-1)	3.092625226(-1)	3.395568337(-1)	3.906521754(-1)
	9	4.835626142(-1)	3.311480808(-1)	4.033436115(-1)	5.421938574(-1)
	10	7.219299052(-1)	3.476162357(-1)	4.561501128(-1)	6.856766939(-1)
	11	8.962385423(-1)	3.586203404(-1)	4.938344729(-1)	7.979967645(-1)
	12	9.882624536(-1)	3.641299732(-1)	5.134442385(-1)	8.597032497(-1)
16	1	-9.990645905(-1)	1.359957597(-2)	4.107720109(-4)	2.207350025(-6)
	2	-9.897252337(-1)	3.822098318(-2)	3.874101569(-3)	1.250323707(-4)
	3	-9.613827512(-1)	6.601278305(-2)	1.297236418(-2)	1.130069111(-3)
	4	-9.053607379(-1)	9.401654185(-2)	2.892277403(-2)	4.935071489(-3)
	5	-8.161716356(-1)	1.209473016(-1)	5.185640968(-2)	1.455833932(-2)
	6	-6.918365299(-1)	1.462012874(-1)	8.115995076(-2)	3.356816813(-2)
	7	-5.338737024(-1)	1.694783484(-1)	1.157087031(-1)	6.527452645(-2)
	8	-3.470762763(-1)	1.906200687(-1)	1.540280602(-1)	1.118785123(-1)
	9	-1.390976210(-1)	2.095365180(-1)	1.944180920(-1)	1.737609201(-1)
	10	8.014188024(-2)	2.261719198(-1)	2.350601923(-1)	2.490518036(-1)
	11	2.991981615(-1)	2.404882744(-1)	2.741142447(-1)	3.335708970(-1)
	12	5.059521993(-1)	2.524575643(-1)	3.098089654(-1)	4.211650958(-1)
	13	6.885071431(-1)	2.620581536(-1)	3.405250990(-1)	5.044014247(-1)
	14	8.360700406(-1)	2.692732405(-1)	3.648697162(-1)	5.755124883(-1)
	15	9.397533816(-1)	2.740902944(-1)	3.817393381(-1)	6.274466492(-1)
	16	9.932364582(-1)	2.765009286(-1)	3.903696141(-1)	6.548549611(-1)

Tabela 4.5: Parametri kvadraturnih formula Gauss-ovog tipa; $r = 2$, $s_1 = -1/2$, $s_2 = -1/4$

n	i	x_i	$A_{1,i}$	$A_{2,i}$
6	1	1.221185842900(1)	9.858095463414(-6)	1.843100435350(-5)
	2	6.905310670462	1.563569554670(-3)	2.534438809695(-3)
	3	3.607225605398	3.719978319820(-2)	5.127172367743(-2)
	4	1.555796061048	2.616823832489(-1)	2.921560902816(-1)
	5	4.370925795316(-1)	7.068628435927(-1)	5.763948219949(-1)
	6	3.271665455717(-2)	7.651354132156(-1)	3.030411966972(-1)
8	1	1.789194218928(1)	3.193875186493(-8)	6.568831380045(-8)
	2	1.162324061288(1)	1.319532098932(-5)	2.436407133309(-5)
	3	7.406393364003	7.868009006937(-4)	1.297980363260(-3)
	4	4.422678545320	1.422101928894(-2)	2.062288509169(-2)
	5	2.348979881582	1.048667333974(-1)	1.298273199963(-1)
	6	1.009338591487	3.685487493263(-1)	3.693596621292(-1)
	7	2.776163582753(-1)	6.733489587467(-1)	4.896454916262(-1)
	8	1.981045717206(-2)	6.106683619857(-1)	2.146389334989(-1)
10	1	2.374640867016(1)	8.795230932886(-11)	1.941544428023(-10)
	2	1.669744109177(1)	7.901670810442(-8)	1.597280805403(-7)
	3	1.175507935366(1)	9.715595498207(-6)	1.798978180453(-5)
	4	8.051691947679	3.610222289100(-4)	6.081429065695(-4)
	5	5.246321006744	5.573313571205(-3)	8.434849771005(-3)
	6	3.158685164349	4.230364001316(-2)	5.639671708629(-2)
	7	1.675573856630	1.749916107880(-1)	1.990952264994(-1)
	8	7.130658414963(-1)	4.223858744392(-1)	3.881185109686(-1)
	9	1.924563246847(-1)	6.193806385029(-1)	4.107800791245(-1)
	10	1.327674282629(-2)	5.074479566621(-1)	1.619650264048(-1)
14	1	3.577621460223(1)	4.938285007123(-16)	1.207743629179(-15)
	2	2.748162705584(1)	1.534759928489(-12)	3.513994366646(-12)
	3	2.140866187152(1)	5.826491343489(-10)	1.253298404042(-9)
	4	1.660843936134(1)	6.473553611834(-8)	1.306847631604(-7)
	5	1.270874455889(1)	2.988803634155(-6)	5.643168855451(-6)
	6	9.513909324042	6.907399354967(-5)	1.213121549323(-4)
	7	6.904524446266	8.955693150986(-4)	1.451719292540(-3)
	8	4.800298056284	7.031017607299(-3)	1.040723196996(-2)
	9	3.142842229190	3.530344004030(-2)	4.700539200856(-2)
	10	1.886099900786	1.181631265299(-1)	1.384755478709(-1)
	11	9.897696742877(-1)	2.724468351054(-1)	2.717477154375(-1)
	12	4.133127038655(-1)	4.439458842477(-1)	3.559497043197(-1)
	13	1.084025628499(-1)	5.158367555060(-1)	2.962453188849(-1)
	14	7.153652610415(-3)	3.787590944369(-1)	1.040069854158(-1)

5

S-ortogonalni polinomi na polukrugu

U glavi 3 smo videli da mnoge osobine ortogonalnih polinoma na intervalu sa datom merom važe i za odgovarajuće *s*-ortogonalne polinome. Prirodno se nameće pitanje da li nešto slično važi i za polinome ortogonalne na polukrugu.

Neka je, kao i u glavi 2

$$D_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}, \quad \Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Za težinsku funkciju ćemo uzeti

$$w(z) = (1 - z^2)^{-1/2}.$$

U glavi 2 pokazano je da za svaki polinom g važi:

$$\int_{\Gamma} \frac{g(z)w(z)}{iz} dz - \pi g(0)w(0) + \frac{1}{i} \int_{-1}^1 \frac{g(x)w(x)}{x} dx = 0,$$

odnosno

$$(5.1) \quad \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{x\sqrt{1-x^2}} dx = i\pi g(0) - \int_{\Gamma} \frac{g(z)}{z\sqrt{1-z^2}} dz, \quad \text{za sve } g \in \mathcal{P}.$$

Neka su $\pi_{n,s}$ monični polinomi koji zadovoljavaju uslov *s*-ortogonalnosti:

$$(5.2) \quad \int_{\Gamma} \pi_{n,s}^{2s+1}(z) z^k (1 - z^2)^{-1/2} \frac{dz}{iz} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Za $s = 0$ dobijamo obične polinome ortogonalne na polukrugu (glava 2).

Tada, prema (5.1), važi:

(i) Za $k = 0$:

$$(5.3) \quad \int_{-1}^1 \frac{\pi_{n,s}^{2s+1}(x)}{x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = i\pi \pi_{n,s}^{2s+1}(0).$$

(ii) Za $k = 1, 2, \dots, n-1$:

$$(5.4) \quad \int_{-1}^1 \pi_{n,s}^{2s+1}(x) x^\nu \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad (\nu = 0, 1, \dots, n-2).$$

Iz (5.4) vidimo da je polinom $\pi_{n,s}^{2s+1}$ ortogonalan na svim polinomima stepena ne višeg od $n-2$ u odnosu na $w(x)$ na $[-1, 1]$, pa ga možemo predstaviti na sledeći način:

$$(5.5) \quad \pi_{n,s}^{2s+1}(z) = C_{n-1}T_{n-1}(z) + C_nT_n(z) + \dots + C_{(2s+1)n}T_{(2s+1)n}(z),$$

gde su T_i Chebyshev-ljevi polinomi prve vrste i $C_{(2s+1)n} = \frac{1}{2^{(2s+1)n-1}}$.

S druge strane je

$$(5.6) \quad \pi_{n,s}(z) = a_0T_0(z) + a_1T_1(z) + \dots + a_nT_n(z), \quad a_n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Iz (5.5) i (5.6) je

$$(5.7) \quad (a_0T_0 + a_1T_1 + \dots + a_nT_n)^{2s+1} = C_{n-1}T_{n-1} + \dots + C_{(2s+1)n}T_{(2s+1)n}.$$

Korišćenjem polinomne formule:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$$

gde se sumiranje vrši po svim m -torkama $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ nenegativnih celih brojeva za koje važi $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ i činjenice da za Chebyshev-ljeve polinome važi

$$T_m \cdot T_n = \frac{1}{2}(T_{m+n} + T_{|m-n|})$$

leva strana jednakosti (5.7) može se zapisati u obliku

$$(5.8) \quad (a_0T_0 + a_1T_1 + \dots + a_nT_n)^{2s+1} = C_0T_0 + C_1T_1 + \dots + C_{(2s+1)n}T_{(2s+1)n},$$

odakle zbog (5.7) mora biti $C_0 = C_1 = \dots = C_{n-2} = 0$, što zajedno sa (5.3) daje sistem od $n-1+1 = n$ jednačina za određivanje nepoznatih koeficijenata a_ν ($\nu = 0, 1, \dots, n-1$):

$$(5.9) \quad \begin{cases} C_\nu = 0 & (\nu = 0, 1, \dots, n-2) \\ \int_{-1}^1 \frac{\pi_{n,s}^{2s+1}(x)}{x\sqrt{1-x^2}} dx = i\pi \pi_{n,s}^{2s+1}(0). \end{cases}$$

Razmotrimo sada slučaj $s = 1$.

Jednakost (5.7) postaje

$$(5.10) \quad (a_0 T_0 + a_1 T_1 + \cdots + a_n T_n)^3 = C_{n-1} T_{n-1} + \cdots + C_{3n} T_{3n}.$$

Na levoj strane jednakosti (5.10) javljaju se sabirci tipa

$$\begin{aligned} a_i T_i^3 & \quad (i = 0, 1, \dots, n), \\ 3a_i a_j^2 T_i T_j^2 & \quad (i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, n; i \neq j), \\ 6a_i a_j a_k T_i T_j T_k & \quad (i = 0, 1, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n; k = 2, 3, \dots, n; i, j, k \text{ različiti}), \end{aligned}$$

za koje važi

$$\begin{aligned} T_i^3 &= \frac{1}{4} T_{3i} + \frac{3}{4} T_i & (i = 0, 1, \dots, n), \\ T_i T_j^2 &= \frac{1}{4} T_{2j+i} + \frac{1}{4} T_{|2j-i|} + \frac{1}{2} T_i & (i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, n; i \neq j), \\ T_i T_j T_k &= \frac{1}{4} T_{i+j+k} + \frac{1}{4} T_{|j+k-i|} + \frac{1}{4} T_{i+|j-k|} + \frac{1}{4} T_{||j-k|-i|} & (i = 0, \dots, n; j = 1, \dots, n; \\ & & k = 2, \dots, n; i, j, k \text{ različiti}). \end{aligned}$$

Kako za svako $k \in \mathbb{N}$ važi $T_{2k+1}(0) = 0$ i $T_{2k}(0) = (-1)^k$ to je

$$\pi_{n,1}^3(0) = C_0 - C_2 + C_4 - C_6 + \cdots.$$

Neka je $n = 1$. Tada je $\pi_{1,1}(z) = T_1 + a_0 T_0$ i

$$\begin{aligned} \pi_{1,1}^3(z) &= T_1^3(z) + 3a_0 T_0(z) T_1^2(z) + 3a_0^2 T_0^2(z) T_1(z) + a_0^3 T_0^3(z) \\ &= \frac{1}{4} T_3(z) + \frac{3}{2} a_0 T_2(z) + \left(\frac{3}{4} + 3a_0^2 \right) T_1(z) + \frac{3}{2} a_0 + a_0^3, \end{aligned}$$

pa je

$$\pi_{1,1}^3(0) = -\frac{3}{2} a_0 + \frac{3}{2} a_0 + a_0^3 = a_0^3.$$

Koeficijent a_0 određujemo iz uslova (5.3), odnosno iz

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \frac{T_3(x)}{x\sqrt{1-x^2}} dx + \frac{3}{2} a_0 \int_{-1}^1 \frac{T_2(x)}{x\sqrt{1-x^2}} dx + \left(\frac{3}{4} + 3a_0^2 \right) \int_{-1}^1 \frac{T_1(x)}{x\sqrt{1-x^2}} dx + \\ + \left(\frac{3}{2} a_0 + a_0^3 \right) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = i\pi a_0^3, \end{aligned}$$

tj.

$$-\frac{\pi}{4} + \left(\frac{3}{4} + 3a_0^2 \right) \pi = i\pi a_0^3.$$

Dakle, koeficijent a_0 je rešenje jednačine

$$1 + 6a_0^2 - 2ia_0^3 = 0.$$

Rešenja prethodne jednačine su:

$$\begin{aligned} & -3.330669074 \cdot 10^{-16} + 0.3843671526 i \\ & 3.330669074 \cdot 10^{-16} - 0.4421253017 i \\ & -1.110223025 \cdot 10^{-16} - 2.9422418510 i \quad . \end{aligned}$$

Prema tome, za $n = 1$ imamo tri monična polinoma koji zadovoljavaju uslov s -ortogonalnosti na polukrugu (5.2).

Neka je sada $n = 2$. Prema (5.6) je

$$\pi_{2,1}(z) = a_2 T_2(z) + a_1 T_1(z) + a_0 T_0(z).$$

Tada je na osnovu prethodnog i zbog $a_2 = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{3}{8} a_1^2 + a_0^3 + \frac{3}{2} a_0 a_1^2 + \frac{3}{8} a_0 \\ C_1 &= \frac{3}{4} a_1^3 + 3a_0^2 a_1 + \frac{3}{8} a_1 + \frac{3}{2} a_0 a_1 \\ C_2 &= \frac{3}{2} a_0 a_1^2 + \frac{3}{32} + \frac{3}{2} a_0^2 + \frac{3}{4} a_1^2 \\ C_3 &= \frac{1}{4} a_1^3 + \frac{3}{16} a_1 + \frac{3}{2} a_0 a_1 \\ C_4 &= \frac{3}{8} a_0 + \frac{3}{8} a_1^2 \\ C_5 &= \frac{3}{16} a_1 \\ C_6 &= \frac{1}{32}, \end{aligned}$$

pa je

$$\pi_{2,1}^3(0) = C_0 - C_2 + C_4 - C_6 = a_0^3 + \frac{3}{4} a_0 - \frac{3}{2} a_0^2 - \frac{1}{8}.$$

Koeficijente a_0 i a_1 dobijamo iz sistema

$$(5.11) \quad \begin{cases} C_0 = 0 \\ \oint_{-1}^1 \frac{\pi_{2,1}^3(x)}{x\sqrt{1-x^2}} dx = i\pi \pi_{2,1}^3(0). \end{cases}$$

Kako je

$$\pi_{2,1}^3(x) = C_1 T_1(x) + C_2 T_2(x) + \cdots + C_6 T_6(x)$$

i

$$\oint_{-1}^1 \frac{T_{2k}(x)}{x\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \quad \text{za sve } k \in \mathbb{N},$$

to je druga jednačina sistema (5.11) ekvivalentna sa

$$C_1 \oint_{-1}^1 \frac{T_1(x)}{x\sqrt{1-x^2}} dx + C_3 \oint_{-1}^1 \frac{T_3(x)}{x\sqrt{1-x^2}} dx + C_5 \oint_{-1}^1 \frac{T_5(x)}{x\sqrt{1-x^2}} dx = i\pi \pi_{2,1}^3(0),$$

odnosno sa

$$C_1 \pi - C_3 \pi + C_5 \pi = i\pi \pi_{2,1}^3(0),$$

tj.

$$\frac{1}{2} a_1^3 + 3a_0^2 a_1 + \frac{3}{8} a_1 = i \left(a_0^3 + \frac{3}{4} a_0 - \frac{3}{2} a_0^2 - \frac{1}{8} \right).$$

Sistem (5.11) je prema tome ekvivalentan sa sistemom

$$(5.12) \quad \begin{cases} 3a_1^2 + 8a_0^3 + 12a_0 a_1^2 + 3a_0 = 0 \\ 4a_1^3 + 24a_0^2 a_1 + 3a_1 = i(8a_0^3 + 6a_0 - 12a_0^2 - 1). \end{cases}$$

Iz prve jednačine prethodnog sistema je

$$(5.13) \quad a_1^2 = \frac{-3a_0 - 8a_0^3}{3 + 12a_0}.$$

Obzirom na (5.13) iz druge jednačine sistema (5.12) dobijamo a_0 , a onda iz (5.13) i a_1 . Među svim tako dobijenim polinomima sistem (5.11) zadovoljavaju sledećih 9 polinoma:

$$\begin{aligned} &0.5(2z^2 - 1) - 1.255041679iz - 1.2273728340 \\ &0.5(2z^2 - 1) + 1.410610320iz - 0.2958451886 \\ &0.5(2z^2 - 1) - 0.2280444577iz + 0.06474935317 \\ &0.5(2z^2 - 1) - (0.3573159034 + 0.7273322236i)z - 0.2570758901 - 0.1246144376i \\ &0.5(2z^2 - 1) + (0.3573159034 - 0.7273322236i)z - 0.2570758901 + 0.1246144376i \\ &0.5(2z^2 - 1) + (0.1321606183 + 0.3519722699i)z + 0.1404065541 - 0.2708240895i \\ &0.5(2z^2 - 1) - (0.1321606183 - 0.3519722699i)z + 0.1404065541 + 0.2708240895i \\ &0.5(2z^2 - 1) - (0.2511981689 + 0.2567189698i)z + 0.1887254527 - 0.5743377565i \\ &0.5(2z^2 - 1) + (0.2511981689 - 0.2567189698i)z + 0.1887254527 + 0.5743377565i. \end{aligned}$$

Nule tih polinoma su redom:

$$\begin{array}{llll}
-1.154811859 + 0.627520840 i & i & 1.154811859 + 0.627520840 i & \\
-0.546250693 - 0.705305160 i & i & 0.546250693 - 0.705305160 i & \\
-0.649807339 + 0.114022229 i & i & 0.649807339 + 0.114022229 i & \\
-0.646294092 + 0.209379493 i & i & 1.003609995 + 0.517952731 i & \\
-1.003609995 + 0.517952731 i & i & 0.646294092 + 0.209379493 i & \\
-0.689477474 - 0.411857056 i & i & 0.557316855 + 0.059884785 i & \\
-0.557316855 + 0.059884785 i & i & 0.689477474 - 0.411857056 i & \\
-0.578687886 - 0.302275647 i & i & 0.829886055 + 0.558994616 i & \\
-0.829886055 + 0.558994616 i & i & 0.578687886 - 0.302275647 i & .
\end{array}$$

Sva izračunavanja rađena su u programskom paketu MATHEMATICA.

Dakle, za $n = 2$ uslov s -ortogonalnosti na polukrugu (5.2) zadovoljava 9 moničnih polinoma. **Prema tome, nema jedinstvenosti kao u realnom slučaju.**

Iz ovog primera se vidi da i nule tih polinoma nisu u D_+ , kao što je u slučaju $s = 0$, tj. za obične polinome ortogonalne na polukrugu.

6

Višestruko ortogonalni polinomi na polukrugu

Višestruko ortogonalni polinomi na polukrugu predstavljaju generalizaciju polinoma ortogonalnih na polukrugu, uvedenih u glavi 2 u smislu da oni zadovoljavaju $r \in \mathbb{N}$ uslova ortogonalnosti u odnosu na nehermitski skalarni proizvod (2.4).

Neka je $r \geq 1$ ceo broj i neka je $\{w_1(x), w_2(x), \dots, w_r(x)\}$ jedan AT sistem težinskih funkcija, koje su pozitivne i integrabilne na otvorenom intervalu $(-1, 1)$ sa eventualnim singularitetima u krajnjim tačkama, takve da se mogu analitički produžiti na gornji poludisk $D_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \text{Im } z > 0\}$. Neka su ta analitička produženja funkcije $w_1(z), w_2(z), \dots, w_r(z)$. Pretpostavimo još da sve težinske funkcije zadovoljavaju i uslove (2.5) i (2.7).

Neka je dalje, kao i u glavi 4, $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_r)$ multi-indeks dužine $|\vec{n}| = n_1 + n_2 + \dots + n_r$. Višestruko ortogonalan polinom na polukrugu je moničan (kompleksan) polinom $\pi_{\vec{n}}(z)$ stepena $|\vec{n}|$ takav da zadovoljava sledeće uslove ortogonalnosti:

$$(6.1) \quad \int_{\Gamma} \pi_{\vec{n}}(z) z^k \frac{w_1(z)}{iz} dz = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n_1 - 1),$$

$$(6.2) \quad \int_{\Gamma} \pi_{\vec{n}}(z) z^k \frac{w_2(z)}{iz} dz = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n_2 - 1),$$

$\vdots$

$$(6.3) \quad \int_{\Gamma} \pi_{\vec{n}}(z) z^k \frac{w_r(z)}{iz} dz = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n_r - 1).$$

Za $r = 1$ imamo obične polinome ortogonalne na polukrugu.

Označimo sa

$$(6.4) \quad (f, g)_j = \int_{\Gamma} f(z)g(z)w_j(z)(iz)^{-1} dz = \int_0^\pi f(e^{i\theta})g(e^{i\theta})w_j(e^{i\theta})d\theta,$$

odgovarajuće skalarne proizvode. Neka je takođe $(f, g)_{j+mr} = (f, g)_j$ za sve $m \in \mathbb{Z}$.

Analogno kao u glavi 2 može se pokazati da za bilo koji polinom g važe sledeće jednakosti

$$(6.5) \quad 0 = \int_{\Gamma} g(z) w_m(z) dz + \int_{-1}^1 g(x) w_m(x) dx \quad (m = 1, 2, \dots, r)$$

i

$$(6.6) \quad \int_{\Gamma} \frac{g(z) w_m(z)}{iz} dz = \pi g(0) w_m(0) + i \int_{-1}^1 \frac{g(x) w_m(x)}{x} dx \quad (m = 1, 2, \dots, r).$$

Razmatraćemo samo skoro dijagonalne multi-indekse $\vec{s}(n)$ date sa (4.13). Odgovarajuće višestruko ortogonalne polinome na polukrugu ćemo obeležavati sa

$$\pi_n(z) = \pi_{\vec{s}(n)}(z).$$

Odgovarajući višestruko ortogonalni polinomi tipa II (realni), kao što smo videli u glavi 4 zadovoljavaju rekurentnu relaciju

$$(6.7) \quad x P_n(x) = P_{n+1}(x) + \sum_{i=0}^r a_{n,r-i} P_{n-i}(x) \quad (n \geq 0)$$

sa početnim uslovima $P_0(x) = 1$ i $P_j(x) = 0$ za $j = -1, -2, \dots, -r$.

Za svako $m = 1, 2, \dots, r$ pridruženi polinomi druge vrste

$$(6.8) \quad Q_n^{(m)}(z) = \int_{-1}^1 \frac{P_n(z) - P_n(x)}{z - x} w_m(x) dx \quad (n = 0, 1, \dots)$$

zadovoljavaju istu rekurentnu relaciju (ali sa drugim početnim uslovima).

Označimo nulte momente sa $\mu_0^{(m)}$, tj.

$$(6.9) \quad \mu_0^{(m)} = \int_{\Gamma} \frac{w_m(z)}{iz} dz = \pi w_m(0) + i \int_{-1}^1 \frac{w_m(x)}{x} dx \quad (m = 1, 2, \dots, r).$$

Neka je

$$(6.10) \quad D_n = \begin{bmatrix} Q_{n-1}^{(1)}(0) - i\mu_0^{(1)} P_{n-1}(0) & \cdots & Q_{n-r}^{(1)}(0) - i\mu_0^{(1)} P_{n-r}(0) \\ Q_{n-1}^{(2)}(0) - i\mu_0^{(2)} P_{n-1}(0) & \cdots & Q_{n-r}^{(2)}(0) - i\mu_0^{(2)} P_{n-r}(0) \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{n-1}^{(r)}(0) - i\mu_0^{(r)} P_{n-1}(0) & \cdots & Q_{n-r}^{(r)}(0) - i\mu_0^{(r)} P_{n-r}(0) \end{bmatrix}.$$

6.1 Egzistencija i jedinstvenost

Analogno kao u dokazu egzistencije i jedinstvenosti polinoma ortogonalnih na polukrugu u poglavlju 2.1 (teorema 2.1.), možemo dokazati egzistenciju i jedinstvenost višestruko ortogonalnih polinoma na polukrugu, uz uslov da su sve matrice D_n , date sa (6.10), regularne.

TEOREMA 6.1. *Neka su w_j ($j = 1, 2, \dots, r$) težinske funkcije, pozitivne na intervalu $(-1, 1)$, analitičke u D_+ , takve da zadovoljavaju uslove (2.5) i (2.7) i da integrali u (6.5) postoje (moguće i kao nesvojstveni). Pretpostavimo još da su sve matrice D_n (6.10) regularne. Tada postoji jedinstveni niz višestruko ortogonalnih polinoma na polukrugu (π_k) . Tada je*

$$(6.11) \quad \pi_n(z) = P_n(z) + \theta_{n,1}P_{n-1}(z) + \theta_{n,2}P_{n-2}(z) + \dots + \theta_{n,r}P_{n-r}(z),$$

gde su (P_k) odgovarajući višestruko ortogonalni polinomi tipa II (realni), a konstante $\theta_{n,j}$ ($j = 1, 2, \dots, r$) rešenja sledećeg sistema linearnih jednačina:

$$\sum_{j=1}^r \theta_{n,j} \left(Q_{n-j}^{(m)}(0) - i\mu_0^{(m)} P_{n-j}(0) \right) = i\mu_0^{(m)} P_n(0) - Q_n^{(m)}(0) \quad (m = 1, 2, \dots, r).$$

DOKAZ: Pretpostavimo prvo da višestruko ortogonalni polinomi (π_k) postoje. Stavljajući

$$g(z) = \frac{1}{i} \pi_n(z) z^{k_m-1} \quad (1 \leq k_m < n_m)$$

u (6.5) za $m = 1, 2, \dots, r$ dobijamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} \pi_n(z) z^{k_m} (iz)^{-1} w_m(z) dz - i \int_{-1}^1 \pi_n(x) x^{k_m-1} w(x) dx \\ &= (\pi_n, z^{k_m})_m - i \langle \pi_n, x^{k_m-1} \rangle_m, \end{aligned}$$

odakle sledi reprezentacija (6.11) polinoma $\pi_n(z)$.

Za određivanje konstanti $\theta_{n,j}$ ($j = 1, 2, \dots, r$), stavljajući

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{\pi_n(z) - \pi_n(0)}{iz} \\ &= \frac{1}{i} \left[\frac{P_n(z) - P_n(0)}{z} + \theta_{n,1} \frac{P_{n-1}(z) - P_{n-1}(0)}{z} + \dots + \theta_{n,r} \frac{P_{n-r}(z) - P_{n-r}(0)}{z} \right] \end{aligned}$$

u (6.5) (za svako $m = 1, 2, \dots, r$), koristeći prvi izraz za g za računanje prvog integrala i drugi za računanje drugog integrala u (6.5), slično kao u dokazu teoreme 2.1., za $n \geq r$ dobijamo sledeći sistem linearnih jednačina:

$$\sum_{j=1}^r \theta_{n,j} \left(Q_{n-j}^{(m)}(0) - i\mu_0^{(m)} P_{n-j}(0) \right) = i\mu_0^{(m)} P_n(0) - Q_n^{(m)}(0) \quad (m = 1, 2, \dots, r).$$

Iz (6.5) i (6.6), uzimajući za polinom g redom $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{r-1}$, koristeći (6.11), (6.7) i (6.8), dobijaju se koeficijenti $\theta_{n,j}$ za $n < r$ (tj. sistemi linearnih jednačina istog oblika kao i za $n \geq r$).

Kako je matrica prethodnog sistema po pretpostavci regularna za svako n , to sistem ima jedinstveno rešenje.

Slično kao u dokazu teoreme 2.1., ako definišemo π_n sa (6.11), gde su $\theta_{n,j}$ ($j = 1, 2, \dots, r$) rešenja gornjeg sistema jednačina, pokazuje se da je

$$(\pi_n, z^{k_m})_m = 0 \quad (0 \leq k_m < n_m). \quad \blacksquare$$

Težinske funkcije koje zadovoljavaju sve uslove navedene u teoremi 6.1. zvaćemo prihvatljivim.

6.2 Rekurentne relacije i numerička konstrukcija višestruko ortogonalnih polinoma na polukrugu

Na sličan način kao u realnom slučaju (poglavlje 4.3) možemo pokazati da višestruko ortogonalni polinomi na polukrugu zadovoljavaju rekurentnu relaciju

$$(6.12) \quad \pi_{m+1}(z) = z\pi_m(z) - \sum_{j=0}^r \alpha_{m,r-j} \pi_{m-j}(z) \quad (m \geq 0),$$

sa početnim uslovima $\pi_0(z) = 1$ i $\pi_{-1}(z) = \pi_{-2}(z) = \dots = \pi_{-r}(z) = 0$.

Stavljajući $m = 0, 1, \dots, n-1$ u (6.12) dobijamo

$$H_n^C \begin{bmatrix} \pi_0(z) \\ \pi_1(z) \\ \vdots \\ \pi_{n-1}(z) \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} \pi_0(z) \\ \pi_1(z) \\ \vdots \\ \pi_{n-1}(z) \end{bmatrix} - \pi_n(z) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tj.

$$(6.13) \quad H_n^C \boldsymbol{\pi}_n(z) = z\boldsymbol{\pi}_n(z) - \pi_n(x)\mathbf{e}_n,$$

gde je

$$\boldsymbol{\pi}_n(z) = [\pi_0(z) \ \pi_1(z) \ \dots \ \pi_{n-1}(z)]^T, \quad \mathbf{e}_n = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T,$$

i H_n^C donja (kompleksna) Hessenberg-ova matrica

$$(6.14) \quad H_n^C = \begin{bmatrix} \alpha_{0,r} & 1 & & & & & \\ \alpha_{1,r-1} & \alpha_{1,r} & 1 & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ \alpha_{r,0} & \cdots & \alpha_{r,r-1} & \alpha_{r,r} & 1 & & \\ & \alpha_{r+1,0} & \cdots & \alpha_{r+1,r-1} & \alpha_{r+1,r} & 1 & \\ & & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \alpha_{n-2,0} & \cdots & \alpha_{n-2,r-1} & \alpha_{n-2,r} & 1 \\ & & & & \alpha_{n-1,0} & \cdots & \alpha_{n-1,r-1} & \alpha_{n-1,r} \end{bmatrix}.$$

Neka su $\xi_\nu \equiv \xi_\nu^{(n)}$ ($\nu = 1, \dots, n$) nule polinoma $\pi_n(z)$. Tada se relacija (6.13) svodi na problem sopstvenih vrednosti

$$\xi_\nu \boldsymbol{\pi}_n(\xi_\nu) = H_n^C \boldsymbol{\pi}_n(\xi_\nu).$$

Dakle, ξ_ν su sopstvene vrednosti matrice H_n^C , a $\boldsymbol{\pi}_n(\xi_\nu)$ odgovarajući sopstveni vektori. Prema (6.13) može se izvesti sledeća reprezentacija polinoma $\pi_n(z)$

$$\pi_n(z) = \det(zI_n - H_n^C),$$

gde je I_n jedinična matrica reda n .

Analogno kao u realnom slučaju, u poglavlju 4.4, koeficijente rekurentne relacije (6.12) možemo dobiti primenom diskretizovane Stieltjes-Gautschi-eve procedure.

TEOREMA 6.2. *Višestruko ortogonalni polinomi na polukrugu (π_n) sa skoro dijagonalnim multi-indeksima zadovoljavaju rekurentnu relaciju*

$$(6.15) \quad \pi_{n+1}(z) = (z - \alpha_{n,r})\pi_n(z) - \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_{n,k} \pi_{n-r+k}(z) \quad (n \geq 0),$$

gde je

$$\alpha_{n,0} = \frac{(z\pi_n, \pi_{[(n-r)/r]})_{\nu+1}}{(\pi_{n-r}, \pi_{[(n-r)/r]})_{\nu+1}}$$

i

$$\alpha_{n,k} = \frac{\left(z\pi_n - \sum_{\lambda=0}^{k-1} \alpha_{n,\lambda} \pi_{n-r+\lambda}, \pi_{[(n-r+k)/r]} \right)_{\nu+k+1}}{(\pi_{n-r+k}, \pi_{[(n-r+k)/r]})_{\nu+k+1}}$$

za $k = 1, 2, \dots, r$.

Ovde je $n = \ell r + \nu$, gde je $\ell = [n/r]$ i $\nu \in \{0, 1, \dots, r-1\}$.

Da bi dobili koeficijente rekurentne relacije (6.12) moramo izračunati skalarne proizvode koji se javljaju u prethodnoj teoremi. Pri tom, zapravo, treba izračunati integrale sledećeg tipa

$$(6.16) \quad \int_{\Gamma} \frac{z^j \pi_l(z) w_k(z)}{iz} dz.$$

Za $j \geq 1$ iz (6.5) imamo

$$\int_{\Gamma} \frac{z^j \pi_l(z) w_k(z)}{iz} dz = i \int_{-1}^1 z^{j-1} \pi_l(z) w_k(z) dz.$$

Dobijene integrale možemo računati tačno, izuzimajući greške zaokrugljivanja, koristeći odgovarajuće Gauss-Chirstoffel-ove kvadraturene formule.

Za $j = 0$ prema (6.6) imamo

$$\int_{\Gamma} \frac{\pi_l(z) w_k(z)}{iz} dz = \mu_0^{(k)} \pi_l(0) + i \int_{-1}^1 \frac{\pi_l(x) - \pi_l(0)}{x} w_k(x) dx.$$

Momenti $\mu_0^{(k)}$ se mogu računati prema (6.9), a za računanje integrala

$$\int_{-1}^1 \frac{\pi_l(x) - \pi_l(0)}{x} w_k(x) dx$$

možemo opet koristiti Gauss-Chirstoffel-ove kvadraturene formule.

U slučaju Jacobi-evih težinskih funkcija za računanje momenata $\mu_0^{(k)}$ bolje je koristiti postupak opisan u poglavlju 2.5 i oblik (2.62).

6.3 Kvadraturene formule Gauss-ovog tipa

Primenjujući proceduru opisanu u poglavlju 6.2 na Jacobi-eve težinske funkcije dobijeni su numerički rezultati koji, kao i u slučaju običnih polinoma ortogonalnih na polukrugu, sugerišu da su sve nule polinoma $\pi_n(z)$ ($n \geq 2$) proste i da se nalaze u gornjem poludisku D_+ .

Znajući koeficijente rekurentne relacije (6.12), tj. znajući elemente matrice H_n^C , date sa (6.14), možemo generisati i optimalni skup kvadraturenih formula (kvadraturenih formula Gauss-ovog tipa) u smislu analiziranom u poglavlju 4.5 za realni slučaj. Analogna definicija je:

DEFINICIJA 6.1. *Neka je $W = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$ skup prihvatljivih težinskih funkcija, neka je $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_r)$ multi-indeks i $n = |\vec{n}|$. Skup kvadraturenih formula oblika:*

$$(6.17) \quad \int_0^\pi f(e^{i\theta}) w_m(e^{i\theta}) d\theta \approx \sum_{\nu=1}^n \sigma_{m,\nu} f(\zeta_\nu), \quad (m = 1, 2, \dots, r)$$

ćemo zvati *optimalan skup* u odnosu na $(W, \vec{n})$ ako i samo ako težinski koeficijenti $\sigma_{m,\nu}$ i čvorovi ζ_ν zadovoljavaju sledeće uslove:

$$(6.18) \quad \begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n \sigma_{m,\nu} &= \int_0^\pi w_m(e^{i\theta}) d\theta \\ \sum_{\nu=1}^n \sigma_{m,\nu} \zeta_\nu &= \int_0^\pi e^{i\theta} w_m(e^{i\theta}) d\theta \\ &\vdots \\ \sum_{\nu=1}^n \sigma_{m,\nu} \zeta_\nu^{n+n_m-1} &= \int_0^\pi e^{(n+n_m-1)i\theta} w_m(e^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

za svako $m = 1, 2, \dots, r$.

Analogno teoremi 4.6. možemo dokazati sledeću teoremu za optimalan skup kvadrature formula u smislu definicije 6.1.

TEOREMA 6.3. *Neka je $W = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$ skup prihvatljivih težinskih funkcija, $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_r)$, $n = |\vec{n}|$. Posmatrajmo kvadrature formule*

$$(6.19) \quad \int_0^\pi f(e^{i\theta}) w_m(e^{i\theta}) d\theta \approx \sum_{\nu=1}^n \sigma_{m,\nu} f(\zeta_\nu), \quad (m = 1, 2, \dots, r).$$

Ove formule čine *optimalan skup* u odnosu na $(W, \vec{n})$ ako i samo ako važi:

1. Tačne su za sve polinome stepena $\leq n - 1$.
2. Polinom $q(z) = \prod_{\nu=1}^n (z - \zeta_\nu)$ je višestruko ortogonalan polinom na polukrugu $\pi_{\vec{n}}(z)$ u odnosu na W .

U slučaju skoro dijagonalnih multi-indeksa čvorove ζ_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) kvadrature formula Gauss-ovog tipa možemo dobiti kao sopstvene vrednosti odgovarajuće kompleksne Hessenberg-ove matrice (6.14). Kao i u realnom slučaju, računamo težinske koeficijente $\sigma_{m,\nu}$ zahtevajući da svaka od r kvadrature formula generiše tačno prvih n modifikovanih momenata.

Označimo sa $V_n^C = [\pi_n(\zeta_1) \ \pi_n(\zeta_2) \ \dots \ \pi_n(\zeta_n)]$ matricu sopstvenih vektora Hessenberg-ove matrice (6.14), normalizovanih tako da su im prve komponente jednake 1. Tada težinske koeficijente $\sigma_{m,\nu}$ možemo dobiti rešavanjem r sistema linearnih jednačina:

$$(6.20) \quad V_n^C \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{m,1} \\ \sigma_{m,2} \\ \vdots \\ \sigma_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0^{*(m)} \\ \mu_1^{*(m)} \\ \vdots \\ \mu_{n-1}^{*(m)} \end{bmatrix} \quad (m = 1, 2, \dots, r),$$

gde su

$$\mu_{\nu}^{*(m)} = \int_{\Gamma} \frac{\pi_{\nu}(z)}{iz} w_m(z) dz \quad (m = 1, 2, \dots, r; \nu = 0, 1, \dots, n-1)$$

modifikovani momenti i $\pi_{\nu}(z) = \pi_{s(\nu)}(z)$ višestruko ortogonalni polinomi na polukrugu.

Računanje modifikovanih momenata se opet svodi na izračunavanje integrala tipa (6.16) za $j = 0$, pa se može koristiti postupak opisan u poglavlju 6.2.

6.4 Numerički primeri

U ovom poglavlju daćemo parametre kvadratura Gauss-ovog tipa za prihvatljiv sistem težinskih funkcija koji se sastoji od dve Jacobi-eve težinske funkcije (2.57) $w^{(\alpha, \beta_1)}(z)$ i $w^{(\alpha, \beta_2)}(z)$ (tabela 6.1).

Tabela 6.1: Parametri kvadrturnih formula Gauss-ovog tipa za $n = 8, 10$; $r = 2$, $\alpha = 1$, $\beta_1 = 1/2$, $\beta_2 = 1/4$

ν	ζ_{ν}	$\sigma_{1,\nu}$	$\sigma_{2,\nu}$
1	$-0.9788997+0.0026247i$	$0.0580377-0.3542335i$	$-0.0188189-0.3832973i$
2	$-0.8760521+0.0159867i$	$-0.3374499+0.9347142i$	$-0.2794998+0.9968886i$
3	$-0.6630103+0.0461827i$	$0.0739024-1.5920321i$	$-0.2597682-1.7364585i$
4	$-0.3560514+0.0994357i$	$-2.4651138+1.8318576i$	$-2.2947968+2.1521091i$
5	$-0.0384815+0.1615833i$	$4.0225993+0.2344999i$	$4.4344593-0.3611610i$
6	$0.2730107+0.1200963i$	$1.7070884-1.8265961i$	$1.5093451-2.0000640i$
7	$0.6153346+0.0567013i$	$0.0142094-0.0333422i$	$-0.0129471+0.0126075i$
8	$0.8781496+0.0170913i$	$0.0683192-0.0148059i$	$0.0636190-0.0182020i$
1	$-0.9880607+0.0012045i$	$-0.2444479+0.3791317i$	$-0.2090496+0.4295410i$
2	$-0.9278047+0.0074739i$	$0.5579302-0.9679792i$	$0.3858939-1.1059521i$
3	$0.9180556+0.0092898i$	$0.0053745-0.0079086i$	$0.0018335-0.0057780i$
4	$-0.7967483+0.0218339i$	$-1.0054363+1.2162234i$	$-0.9308388+1.3867825i$
5	$0.7356568+0.0308872i$	$0.1766943-0.0092201i$	$0.1691405-0.0162823i$
6	$-0.5916927+0.0466799i$	$0.7261829-1.5490023i$	$0.4441955-1.7913086i$
7	$0.4779421+0.0651869i$	$-0.0093143-0.1648483i$	$-0.0616815-0.1002179i$
8	$-0.3288006+0.0861789i$	$-3.0832225+1.3083385i$	$-3.0114444+1.7142267i$
9	$0.1891105+0.1151987i$	$2.3710585-2.1396074i$	$2.1832689-2.4192835i$
10	$-0.0616346+0.1363395i$	$3.6467732+1.1149342i$	$4.1702746+0.5706947i$

Literatura

- [1] A.I. APTEKAREV, *Multiple orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **99** (1998), 423–447.
- [2] A.I. APTEKAREV, A. BRANQUINHO, W. VAN ASSCHE, *Multiple orthogonal polynomials for classical weights*, Trans. Amer. Math. Soc.
- [3] B. BECKERMANN, J. COUSSEMENT, W. VAN ASSCHE, *Multiple Wilson and Jacobi-Piñeiro polynomials*
- [4] B.D. BOJANOV, D. BRAESS, N. DYN, *Generalized Gaussian quadrature formulas*, J. Approx. Theory **48** (1986), 335–353.
- [5] C.F. BORGES, *On a class of Gauss-like quadrature rules*, Numr. Math. **67** (1994) 271–288.
- [6] L. CHAKALOV, *General quadrature formulae of Gaussian type*, Bulgar. Akad. Nauk Izv. Mat. Inst. **1** (1954), 67–84 (na bugarskom) [Engleski prevod East J. Approx. **2** (1995), 261–276].
- [7] T.S. CHIHARA, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [8] H. ENGELS, *Numerical Quadrature and Cubature*, Academic Press, London, 1980.
- [9] W. GAUTSCHI, *A survey of Gauss-Christoffel quadrature formulae*, P.L. Butzer, F. Fehér (Eds.), E.B. Christoffel, Birkhäuser, Basel, 1981, 72–147.
- [10] W. GAUTSCHI, *On the zeros of polynomials orthogonal on the semicircle*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 20, No. 3., 1989, 738–743.
- [11] W. GAUTSCHI, *Orthogonal polynomials: applications and computation*, Acta Numerica (1996), 45–119.
- [12] W. GAUTSCHI, H.J. LANDAU AND G.V. MILOVANOVIĆ, *Polynomials Orthogonal on the Semicircle, II*, Constr. Approx., **3** (1987), 389–404.
- [13] W. GAUTSCHI, G.V. MILOVANOVIĆ, *Polynomials Orthogonal on the Semicircle*, J. Approx. Theory, **46** (1986), 230–250.

- [14] W. GAUTSCHI, G.V. MILOVANOVIĆ, *S-orthogonality and construction of Gauss-Turán-type quadrature formulae*, J. Comput. Appl. Math. **86** (1997), 205-218.
- [15] A. GHIZZETTI, A. OSSICINI, *Quadrature Formulae*, Akademie Verlag, Berlin, 1970.
- [16] A. GHIZZETTI, A. OSSICINI, *Sull' esistenza e unicità delle formule di quadratura gaussiane*, Rend. Mat.(6) **8** (1975), 1-15.
- [17] G.H. GOLUB, C.F. VAN LOAN, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, 1983.
- [18] D. KERSHAW, *A note on orthogonal polynomials*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society **127** (1970), 83-93.
- [19] G.V. MILOVANOVIĆ, *Some application of the polynomials orthogonal on the semicircle*, Numerical Methods (Miskolc, 1986.), 625-634, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, Vol. **50**, North-Holland, Amsterdam-New York, 1987.
- [20] G.V. MILOVANOVIĆ, *Construction of s-orthogonal polynomials and Turán quadrature formulae*, G.V. Milovanović (Ed.), Numerical Methods and Approximation Theory III (Niš, 1987), Univ. Niš, Niš, 1988, 311-328.
- [21] G.V. MILOVANOVIĆ, *Complex Orthogonality on the semicircle with respect to Gegenbauer weight: Theory and applications*, In: Topics in Mathematical Analysis (T. M. Rassias, ed.), 695-722, Ser. Pure Math., 11, World Sci. Publishing, Teaneck, NJ, 1989.
- [22] G.V. MILOVANOVIĆ, *On polynomials orthogonal on the semicircle and applications*, J. Comput. Appl. Math. **49** (1993), 193-199.
- [23] G.V. MILOVANOVIĆ, *S-orthogonality and generalized Turán quadratures: construction and applications*, D.D. Stancu, Ch. Coman, W.W. Breckner, P. Blaga (Eds.), Approximation and Optimization, Vol. I (Cluj-Napoca, 1996), Transilvania Press, Cluj-Napoca, Romania, 1997, 91-106.
- [24] G.V. MILOVANOVIĆ, *Quadratures with multiple nodes, power orthogonality, and moment-preserving spline approximation*, Numerical analysis 2000, Vol.V, Quadrature and orthogonal polynomials (W. Gautschi, F. Marcellan, and L. Reichel, eds.), J. Comput. Appl. Math. **127** (2001), 267-286.
- [25] G.V. MILOVANOVIĆ, *Orthogonal polynomials on the radial rays in the complex plane and applications*, Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie II, Suppl. **68** (2002), 65-94.
- [26] G.V. MILOVANOVIĆ, D.S. MITRINOVIĆ, TH.M. RASSIAS, *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*, World Scientific-Singapore, New Jersey, London, Hong Kong (1994).

- [27] G.V. MILOVANOVIĆ, M.M. SPALEVIĆ, *Construction of Chakalov-Popoviciu's type quadrature formulae*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl., no. **52**, Vol. II (1998), 625-636.
- [28] G.V. MILOVANOVIĆ, M.M. SPALEVIĆ, *Quadrature formulae connected to σ -orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **140** (2002), 619-637.
- [29] G.V. MILOVANOVIĆ, M. STANIĆ, *Construction of Multiple Orthogonal Polynomials by Discretized Stieltjes-Gautschi Procedure and Corresponding Gaussian Quadratures*, Facta Univ. Ser. Math. Inform. **18** (2003), 9-29.
- [30] A. MORELLI, I. VERNA, *Formula di quadratura in cui compaiono i valori della funzione e delle derivate con ordine massimo variabile da nodo a nodo*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **18** (1969), 91-98 (na italijanskom).
- [31] A. MORELLI, I. VERNA, *Sulla convergenza di formule di quadratura collegate con i polinomi σ -ortogonali*, Note Mat. **6** (1986), 35-48 (na italijanskom).
- [32] Y.G. SHI, *A kind of extremal problems of integrations on an arbitrary measure*, Acta Sci. Math. (Szeged), **65** (1999), 567-575.
- [33] Y.G. SHI, *Generalized Gaussian quadrature formulas for Tchebycheff systems*, Far East J. Appl. Math. **3(2)** (1999), 153-170.
- [34] B.T. SMITH, *et al.*: *Matrix Eigensystem Routines – EISPACK Guide* Lect. Notes Comp. Science Vol. **6**, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1976.
- [35] W. VAN ASSCHE, *Multiple orthogonal polynomials, irrationality and transcendence*, in 'Continued Fractions: from analytic number theory to constructive approximation' (B.C. Berndt et al., eds.), Contemporary Mathematics **236**, Amer. Math. Soc. providence, RI, 1999, pp. 325-342.
- [36] W. VAN ASSCHE, *Non-symmetric linear difference equations for multiple orthogonal polynomials*, CRM Proceedings and Lecture Notes **25** (2000), pp. 391-405.
- [37] W. VAN ASSCHE, E. COUSSEMENT, *Some classical multiple orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **127** (2001), 317-347.